



سری عمران

## زبان عمومی و تخصصی

### کارشناسی ارشد

شاید جالب باشد، خدمت شما داوطلبان محترم عرض کنیم که ما نیز (پاسخ‌دهندگان) در مورد دو سؤال در این درس با هم اختلاف نظر داشتیم!!!

#### زبان عمومی

اگر بخواهیم راجع به آزمون این درس اظهار نظر کنیم می‌توان اذعان کرد که سؤالات زبان عمومی، شامل ۱۰ تست نسبتاً دشوار از واژگان و ۵ تست نسبتاً آسان از گرامر بوده است.

در رابطه با کتاب زبان عمومی سری عمومی می‌توان گفت که از ۴۰ لغت مطرح شده در آزمون امسال، ۲۶ لغت عیناً در بخش واژگان کتاب سری عمومی مطرح شده است که با این تعداد لغت به ۷ تست از سؤالات لغات می‌توان جواب صحیح داد. ضمناً سؤالات گرامر نیز شباهت بسیار زیادی با قسمت گرامر این کتاب داشت، که این باعث رضایت خود ما نیز شد.

#### زبان تخصصی

در رابطه با زبان تخصصی می‌توان گفت که سطح سؤالات نسبت به سال گذشته دشوارتر بوده است و داوطلبان می‌بایست نسبت به لغات و مفاهیم گرایش‌های مختلف رشته مهندسی عمران احاطه کامل داشته باشند. اگرچه دو درک مطلب تخصصی نسبتاً ساده به نظر می‌رسید، اما سؤالات مطرح شده از آن بسیار آگاهانه (کمی هم زیرکانه) مطرح شده بود. ۵ سؤال انتهایی این بخش نیز نسبت به سال گذشته بسیار سخت‌تر بود.

#### گروه پاسخ‌دهندگان:

محمد اصفهانی، زهرا آهنگر، محمد صادق عباسیان

## زبان

۱- (۴)

پدر تد غیرعادی به نظر می‌رسد. او مکرراً مشاهده شده است که به نحوی ..... رفتار می‌کند.

(۱) مشتاق، علاقه‌مند (۲) ماهر (۳) شکیب، بادوام (۴) غیرمعارف، خلاف عرف

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، درس ۴، لغت ۲۱

convention قرارداد، رسم، سنت، همایش

Convention dictates that it is the man who asks the woman to marry him and not the reverse.

سنت (آداب و رسوم) دیکته می‌کند که این مرد است که باید از زن بخواهد که با او ازدواج کند و نه برعکس !!!

تست ۳ درس ۱۱، تست ۵ درس ۸ و تست ۵ درس ۱۱ نیز مشابه این تست می‌باشد.

لغات موجود در کتاب:

لغت ۳۶، درس ۵ : enthusiasm - لغت ۳۰، درس ۱۶ : endure

۲- (۲)

..... تفکر علمی، این ایده که دانش باید از طریق پژوهش تکامل پیدا کند را نهادینه کرده است.

(۱) مصنوعی (۲) پیدایش، ظهور (۳) اشتباه سهوی (۴) شهرت

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، درس ۲، لغت ۳

advent ظهور

Life in Britain was transformed by the advent of the steam engine.

با ظهور موتور بخار، زندگی در انگلستان دگرگون گردید.

تست ۳۰ درس ۴ نیز مشابه این تست می‌باشد.

لغات موجود در کتاب:

لغت جمله ۳۴، صفحه ۳۶۸ : artifact - لغت ۳۵ درس ۴ : renown

۳- (۱)

پائول از این حقیقت که نزدیک‌ترین دوستش به او اعتماد نکرد ..... .

(۱) رنجیدن (۲) به دست آوردن (۳) اعلام کردن، آگاهی دادن (۴) بالا بردن

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، درس ۱۶، لغت ۵۰

resent رنجیدن، عصبانی شدن

I deeply resented her criticism.

من عمیقاً (به شدت) از انتقاد او ناراحت شدم (رنجیدم).

۴- (۳)

مهمانی‌های شام جیل به دلیل ..... او برای غذاهای مکزیکی به سرعت خسته‌کننده شد.

(۱) پراکندگی (۲) طعم (۳) میل زیاد (۴) شایعه

لغات موجود در کتاب:

لغت ۴ درس ۳ : disperse - در جمله تست ۲۹ درس ۱۲ : flavor

## ۵- (۳)

هنگام شرکت در کلاس یوگا، کاترینا وضعیتی آرام پیدا می‌کند. موزیک ..... و نور ملایم احساس آرامشی می‌دهد که او در وجود آشفته‌اش ندارد.  
(۱) پر سر و صدا (۲) پراکنده، انفرادی (۳) تسکین‌دهنده (۴) به سرعت فزاینده

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، درس ۱۳، لغت ۱۵

آرام کردن

pacify

Syn: appease , soothe , placate

Economic reforms are needed to pacify and modernize the country.

برای آرام ساختن و مدرن کردن کشور، نیاز به اصلاحات اقتصادی است.

جدول تست‌های ۲۱ تا ۳۰، درس ۴

engender	ایجاد کردن	tact	تدبیر، درایت
arrogant	مغرور	soothe	آرام کردن، تسکین دادن

## ۶- (۴)

ساکنین شهری قرن هجدهم در شرایطی به مراتب بدتر نسبت به ..... مدرن خود زندگی می‌کردند.  
(۱) میانجی‌ها (۲) ساکنین (۳) رقبا (۴) همتایان

لغات موجود در کتاب:

لغت ۱۷ درس ۱۱: mediate - لغت ۳۴ درس ۶: reside - لغت جدول ۱۰ - ۲۰ درس ۳: rival

## ۷- (۱)

با این وجود، بسیاری از زوج‌هایی که قادر به فرزنددار شدن نبوده‌اند، به طرز قابل فهمی ..... به پذیرش سرپرستی کودکان با معلولیت ذهنی بوده‌اند.  
(۱) بی‌میل (۲) ناکافی (۳) نیکوکار (۴) سفسطه‌آمیز

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، درس ۶، لغت ۴۹

reluctant	بی‌میل، با اکراه
Many parents feel reluctant to talk openly with their children.	
بسیاری از والدین تمایلی به گفتگوی صریح با فرزندانشان ندارند.	

تست ۲۲ درس ۹ و تست ۹ آزمون ۲ نیز مشابه این تست می‌باشد.

لغات موجود در کتاب:

لغت ۱۰ درس ۱: sufficient - لغت ۸ درس ۵: fallacy

## ۸- (۲)

یکی از دانش‌آموزان ما قادر به ..... صندلی چرخ‌دار خود به بالای رمپ نبود.  
(۱) ارتقا دادن (۲) حرکت دادن - راندن (۳) نجات دادن (۴) آغاز کردن

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، درس ۶، لغت ۳۰

propel	راندن، حرکت دادن
Four jet engines propel the 8,300-ton ship.	
۴ موتور جت، کشتی ۸۳۰۰ تنی را حرکت می‌دهند.	

لغات موجود در کتاب:

لغت ۲۸ درس ۳: enhance - لغت ۳ درس ۱، تست ۲۹ صفحه ۳۴۴: initiate

۹- (۴)

پس از اینکه سازمان به قربانیان فاجعه کمک کرد، هدیه‌ای به پاس ..... دریافت نمود.

(۱) نوآوری (۲) مصالحه - آشتی (۳) ولخرجی (۴) نوع دوستی

لغات موجود در کتاب:

لغت ۴۷ درس ۲: innovation - لغت تست ۶ صفحه ۴۳۶: altruism

۱۰- (۴)

اگرچه بسیاری از زنان در انگلستان کنترل ناچیزی بر روی زندگیشان در قرون وسطی داشتند، زندگینامه مربوط به مارگری کمپ میزان قابل توجهی از خودمختاری را .....

(۱) شامل بودن (۲) بی اثر کردن (۳) اداره کردن (به نفع خود) (۴) نشان دادن

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، درس ۶، لغت ۱۱

demonstrate نشان دادن، نمایش دادن، تظاهرات کردن  
These problems demonstrate the importance of strategic planning.  
این مشکلات، اهمیت برنامه‌ریزی استراتژیک را نشان می‌دهد.

لغات موجود در کتاب:

لغت ۴۹ درس ۴: compromise - لغت ۱۰ درس ۲: manipulate - لغت تست ۱۰ صفحه ۴۵۷: negate

۱۱- (۲)

همان‌طور که در فصل (۲) مطالعه کردیم، از زمان ماضی نقلی زمانی استفاده می‌شود که کاری در گذشته شروع شده باشد و خودش یا اثرش هنوز باقی مانده باشد.

تذکره: مهندسان گرامی توجه داشته باشید که واژه Since یکی از نشانه‌های حال کامل است.

کتاب زبان عمومی (سری عمومی ارشد)، کاربرد ۲ از مهارت اول فصل دوم

کاربرد ۲: این زمان برای بیان کارهایی استفاده می‌شود که در گذشته شروع شده و هنوز در زمان حال نیز ادامه دارد و یا اثر آن در زمان حال دیده می‌شود. توجه کنید که برای بیان این منظور از دو قید for (برای مشخص کردن مدت زمان) و since (برای بیان نقطه شروع عمل) می‌توان استفاده کرد.

Peter has lived in Chicago since 2000.

پیتر از سال ۲۰۰۰ در شیکاگو زندگی کرده است (هنوز زندگی می‌کند).

۱۲- (۲)

در ابتدا به قسمتی که جای خالی در آن قرار گرفته است توجه کنید. در جمله Only قرار گرفته است و به خاطر داریم که وجود Only در ابتدای جمله باعث ایجاد وارونگی می‌شود. بنابراین داریم:

Science has come inversion → Only Recently has science come

تست ۴، صفحه ۱۶۷، فصل پنجم گرامر

1- ..... used for making decisions in the business world, but also for forecasting and planning.

- 1) Not only are computers
- 2) Computers are
- 3) Not only computers are
- 4) Only computers are

پاسخ: کامپیوترها نه تنها برای تصمیم‌گیری کسب و کار، بلکه برای پیش‌بینی و برنامه‌ریزی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در ابتدا با توجه به گزینه‌ها و وجود but also در جمله نیاز به Not only داریم و گزینه (۲) و (۴) نادرست است، دقت کنید که اگر not only در ابتدای جمله قرار گیرد وارونگی رخ می‌دهد، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

## ۱۳- (۴)

در ابتدا به بعد و قبل از جای خالی توجه کنید. در جمله کلمه and وجود دارد و بنابراین باید ساختار موازی رعایت شده در جمله را پیدا کنید.  
The nature of ..... and the possibility that  
 اسم The+                      اسم The+

**نکته:** مهندسان گرامی توجه کنید که علت حضور that بعد از اسم possibility وجود جمله بعد از آن است (life exists elsewhere).

تست ۵، صفحه ۱۳۹، فصل چهارم گرامر

**Mass - production techniques pushed companies into standardized ..... and rigid manufacturing, emphasizing efficiency and low cost over flexibility.**

- 1) productive                      2) produce                      3) products                      4) productivity

پاسخ: تکنیک‌های تولید انبوه، کمپانی‌ها را به سمت محصولات استاندارد شده و تولید سخت‌گیرانه سوق داد که بر روی کارایی و هزینه پایین بیش از انعطاف‌پذیری تأکید داشت.

پس از جای خالی کلمه ربط and دیده می‌شود، بنابراین باید ساختارهای موازی را در جمله تشخیص بدهید.

into standardized ..... and rigid manufacturing.

صفت                      (اسم) = products                      صفت                      (اسم)

با توجه به اینکه نیاز به اسم داریم، گزینه (۳) صحیح است. (توجه کنید که با توجه به مهارت‌های فصل (۳) پس از صفت standardized نیاز به اسم داریم که همان ساختار (اسم + صفت) می‌باشد و گزینه (۳) این ساختار را ایجاد می‌کند)

## ۱۴- (۱)

در ابتدا به جمله ای که جای خالی در آن قرار گرفته است توجه کنید. در این جمله دو فعل gain و orbit قرار دارند که به یکدیگر متصل شده‌اند. لذا برای ارتباط آنها نیاز به ضمیر موصولی می‌باشد. با توجه به اینکه در گزینه‌ها ضمیر موصولی دیده نمی‌شود، بنابراین ضمیر موصولی از جمله حذف شده و یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است. می‌دانیم که در صورت حذف ضمیر موصولی فعل به صورت ing دار یا p.p ظاهر می‌شود. اما از طرف دیگر باید مشخص کنیم که ساختار جمله معلوم است یا مجهول که به دلیل وجود فاعل در جمله (planet) جمله معلوم است.

Planets سیارات: فاعل                      Orbit چرخیدن: فعل

{ معلوم: سیالاتی که (حول ستارگان) می‌چرخند. ✓

{ مجهول: سیاراتی که (حول ستارگان) چرخانده می‌شود.

بنابراین فعل جمله معلوم است و قبل از حذف ضمیر موصولی به شکل زیر بوده است.

... Planets which (that) orbit other stars ...

تست ۱۶، صفحه ۲۱، فصل اول گرامر

**Learning is time - consuming, ..... proper experience through extensive reading, practice, and discussion with others.**

- 1) need                      2) needing                      3) is needed                      4) being needed

پاسخ: یادگیری زمانی است که نیازمند تجربه مناسب از طریق مطالعه گسترده، تمرین و بحث با دیگران می‌باشد.

در گزینه‌های سؤال یک فعل در چهار شکل آمده است، بنابراین ممکن است این سؤال از مبحث حذف ضمائر موصولی باشد. با توجه به وجود دو جمله همراه با دو فعل is و need نیاز به یک ضمیر موصولی برای ارتباط دو جمله داریم و با در نظر گرفتن گزینه‌ها ضمیر موصولی حذف شده است. مطابق با مهارت سوم حتماً یکی از گزینه‌های ing + فعل (needing) و یا being needed تست است اما جمله فوق یک جمله معلوم است (یادگیری زمانی است ← معلوم) بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

داوطلبان گرامی دقت کنید که در این تست فعل need قبل از حذف در حالت معلوم قرار داشته و به صورت زیر می‌باشد.

Learning is time - consuming, which needs proper experience

needing

**تذکر:** دقت کنید کلیه تست‌های مهارت ۳ فصل اول مشابه این تست می‌باشد.

## ۱۵- (۳)

با توجه به جای خالی گزینه‌های (۱) و (۴) نمی‌تواند صحیح باشد. همچنین زمانی از الگوی er + than + (صفت/قید) استفاده می‌کنیم که بخواهیم درجه یک صفت را بین دو مورد مقایسه کنیم، اما در این جمله مقایسه‌ای انجام نشده است (به عبارات بعد از جای خالی توجه کنید).

**تذکر:** مهندسان گرامی توجه کنید که با توجه به معنای گزینه نیز می‌توانستیم گزینه (۳) را انتخاب کنیم.

## ترجمه متن ۱

ساده‌ترین فرم تحلیل پلاستیک در مهندسی سازه به یک مصالح الاستوپلاستیک ایده‌آل می‌پردازد و دربرگیرنده دو ایده می‌باشد: مفصل پلاستیک و تشکیل مکانیسم.

ایده مفصل پلاستیک بیان می‌کند که مقطع عرضی که در معرض نیروی محوری و خمشی می‌باشد، صرفاً می‌تواند ۲ حالت داشته باشد: (۱) کاملاً الاستیک، اگر تنش ماکزیمم برابر و یا کمتر از تنش تسلیم باشد و یا (۲) کاملاً پلاستیک، تحت توزیعی از تنش‌های کششی و فشاری که از لحاظ بزرگی معادل تنش تسلیمی می‌باشند که نیروهای موجود بر روی مقطع را متعادل می‌سازد. مورد دوم یک مفصل پلاستیک را توصیف می‌نماید، مقطعی که می‌تواند متحمل یک کرنش پلاستیک نامحدود تحت این نیروها گردد اگر به‌وسیله باقیمانده مقاومت سیستم محدود نگردیده باشند. برخلاف تشکیل مفاصل پلاستیک که وابسته به مقطع عرضی می‌باشد، ایجاد مکانیسم یک فرآیند عضوی یا سیستمی می‌باشد. در تحلیل صلب-پلاستیک، از تغییر شکل‌های الاستیک صرف‌نظر می‌گردد و جستجویی بعمل می‌آید برای یافتن مقدار کوچکترین بار مورد نیاز برای ایجاد مکانیسم، که عبارتست از الگوی از مفاصل پلاستیک که شرایط تعادل را در سازه فاقد تغییر شکل ارضا می‌نمایند و به‌طور همزمان جداشدن از این الگو (پیکربندی) را مجاز می‌دانند. این فرآیند جستجو، معمولاً در برگیرنده بررسی موقعیت‌های محتمل برای مفاصل پلاستیک بحرانی و الزامات مربوطه برای ارضا تعادل بر روی سازه فاقد تغییر شکل می‌باشد.

## ۱۶- (۲)

اگر تنش‌ها در برخی از بخش‌های مقطع عرضی یک عضو، متجاوز از حد تسلیم گردد، آن مقطع در یک تحلیل ساده پلاستیک به عنوان ..... در نظر گرفته می‌شود.

(۱) کاملاً الاستیک (۲) کاملاً پلاستیک (۳) تا حدی پلاستیک (۴) بالقوه پلاستیک

پاسخ: در پاراگراف دوم به این موضوع اشاره شده و صرفاً در متن ۲ حالت کلی در نظر گرفته شده که وضعیت مطرح شده در صورت تست مرتبط با حالت دوم می‌باشد.

**دقت:** از نظر علمی، گزینه (۳) صحیح است و اگر به احتمال ضعیف به عنوان پاسخ اعلام شد، تعجب نکنید!!

## ۱۷- (۲)

اگر تغییر شکل یک مفصل پلاستیک به‌وسیله سایر المان‌های یک سازه محدود نگردد،.....

- (۱) سازه ناپایدار می‌گردد
- (۲) تغییر شکل‌های بزرگی ممکن است در مفصل پلاستیک رخ دهد
- (۳) مفاصل پلاستیک بیشتری ممکن است در سازه بوجود آیند
- (۴) ممکن است نیروها به سایر المان‌ها باز پخش گردند.

پاسخ: به این بخش از پاراگراف دوم توجه کنید:

A section that can undergo indefinite plastic strain.....

## ۱۸- (۴)

در پاراگراف آخر، عبارت that configuration که زیر آن خط کشیده شده است برمی‌گردد به:

(۱) مکانیسم (۲) تعادل (۳) سازه فاقد تغییر شکل (۴) الگوی مفاصل پلاستیک

## ۱۹- (۴)

موقعیت دقیق مفاصل پلاستیک در یک مکانیسم.....

- (۱) از قبل تعیین گردیده است
- (۲) مستقل از بارگذاری می‌باشد
- (۳) می‌بایست در تعادل مدنظر قرار گیرد
- (۴) می‌بایست مستلزم کمترین بار تخریب باشد

In rigid – plastic analysis, elastic deformation ...

پاسخ: به جمله زیر از پاراگراف دو دقت کنید:

## ۲۰- (۳)

کدامیک از گزاره‌های زیر به بهترین نحو می‌تواند جایگزین گزاره “admit departure from” در پاراگراف پایانی گردد.

- (۱) میپذیرد تغییرات
- (۲) مجاز می‌داند افزایش تغییر شکل‌ها را در
- (۳) مجاز می‌داند تغییر
- (۴) مجاز می‌داند برای آغاز

## ترجمه متن ۲

در یک ساختمان معمولی فرض می‌گردد که سیستم کف (تیر و دال‌ها) در صفحه افقی صلب است و فرض می‌گردد که بارهای جانبی در رقوم طبقات متمرکز گردیده‌اند. دال‌های کف و شاه تیرها که در کنار هم عمل می‌نمایند، مقاومت قابل توجهی در برابر نیروهای جانبی فراهم می‌کنند. بررسی ساختمان‌های فولادی که در برابر نیروهای باد بالا مقاومت کرده‌اند نشان داده است که دال‌های کف نیروهای جانبی را به نحوی توزیع می‌نمایند که تمامی ستون‌های موجود در یک طبقه خاص، اساسا دارای تغییر شکلی برابر خواهند بود، مادامی که پیچش در سازه رخ ندهد. هنگامیکه نیروهای جانبی به طور خاصی زیاد می‌باشند، نظیر آنچه که در ساختمان‌های بلند وجود دارد و یا هنگامی که نیروهای لرزه‌ای مد نظر باشند، دیوارهای به طور خاص طراحی شده‌ای ممکن است مورد استفاده قرار بگیرند برای تحمل بخش‌های عمده‌ای از نیروهای جانبی.

### ۲۱- (۳)

بر طبق متن، صحیح‌ترین گزاره را انتخاب کنید

- (۱) سیستم کف صلب به کاهش پیچش در ساختمان کمک می‌نماید
- (۲) دیوارهای به‌طرز خاص طراحی شده برای تحمل نیروهای جانبی مورد نیاز می‌باشند
- (۳) سیستم کف متشکل از تیرها و دال‌ها می‌تواند صلب مفروض گردد
- (۴) اکثر سیستم‌های کف ساختمانی در صفحه خودشان از تغییر شکل‌های ناچیز (قابل صرف‌نظر کردن) برخوردار می‌باشند.

### ۲۲- (۱)

در متن فوق "acting together" یعنی:

- (۱) عمل کردن به عنوان یک واحد (مجموعه)
- (۲) با هم تغییر شکل دادن
- (۳) باهم مقاومت کردن در برابر نیروها
- (۴) عمل کردن در یک سیستم کف

### ۲۳- (۳)

در جمله آخر "specially designed walls" برمی‌گردد به:

- (۱) دیوارهای باربر
- (۲) دیوارهای حائل
- (۳) دیوارهای برشی
- (۴) دیوار سازه‌ای

### ۲۴- (۳)

صحیح‌ترین گزاره را انتخاب نمایید.

به منظور برخورداری از تغییر شکل‌های مشابه برای ستون‌های یک طبقه خاص:

- (۱) سازه باید متقارن باشد
  - (۲) از پیچش کف‌ها باید جلوگیری گردد
  - (۳) کف‌ها باید صلب باشند و پیچش نباید رخ دهد
  - (۴) کف‌ها باید صلب باشند و ستون‌ها می‌بایست متقارن باشند
- پاسخ: عملکرد صلب کف‌ها و عدم بوجود آمدن پیچش در سازه، شروط لازم برای تحقق تغییر شکل‌های مساوی در ستون‌ها می‌باشند.

### ۲۵- (۴)

کدامیک از موارد زیر، بهترین بیان فنی برای گزاره زیر می‌باشد:

"سیستم کف در صفحه افقی صلب مفروض می‌گردد"

- (۱) پایه ستون
- (۲) سکو
- (۳) سکو (خاکریز) سخت
- (۴) دیافراگم

### ۲۶- (۲)

ساختمان‌های عادی ممکن است متحمل کمی..... در زلزله‌های قوی گردند، اما آنها طراحی شده‌اند تا در طی این وقایع مانع..... گردند.

- (۱) تغییر شکل، پلاستیسیته
- (۲) خرابی، فروریختن
- (۳) لرزش، خرابی
- (۴) تغییر شکل، فرو ریختن

### ۲۷- (۱)

بندهای موقتی، سازه‌هایی غیر دائمی می‌باشند که برای..... جریان رودخانه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

- (۱) منحرف کردن
- (۲) جابه‌جا کردن
- (۳) جایگزین کردن
- (۴) متوقف کردن

توضیح: coffer dam یا همان بند موقتی، سازه‌ای غیر دائمی می‌باشد که برای منحرف کردن جریان آب رودخانه در زمان ساخت و ساز (به منظور خشک کردن محوطه کارگاه) استفاده می‌گردد.

۲۸- (۴)

در خاک‌های ماسه‌های اشباع اگر فشار آب حفره‌ای.....، خاک اساساً مقاومت و سختی خود را از دست می‌دهد که باعث می‌شود مانند یک سیال عمل نماید.

(۱) حذف گردد

(۲) بیشتر از فشار خاک باشد

(۳) به مقادیر بسیار کمی تقلیل یابد

(۴) به اندازه کافی بزرگ برای حمل تمام بارها باشد

**تذکر:** گزینه‌های (۲) و (۴) از لحاظ مفاهیم مکانیک خاک مشابه یکدیگر می‌باشند و انتخاب هر یک به نظر طراح بستگی دارد از نظر ما (پاسخ‌دهندگان) گزینه (۲) مناسب‌تر است.

۲۹- (۲)

در بتن مسلح، شکست مصالح از سطح عضو، ناشی از تنش و یا پوشش ناکافی .....نامیده می‌شود.

(۱) خمش

(۲) خرد شدگی، پوسته پوسته شدن (۳) ترک برشی

(۴) گسیختگی سطحی

۳۰- (۴)

حوزه زهکشی، بخشی از زمین می‌باشد، جایی که آب سطحی ناشی از باران و ذوب شدن برف و یا یخ، به سمت یک نقطه همگرا می‌گردد، که معمولاً خروجی حوزه می‌باشد.

(۱) می‌رود به

(۲) عبور می‌کند از میان

(۳) زهکشی می‌کند از میان

(۴) انباشته می‌شود در

۱- مهندسان گرامی توجه کنید اکثر لغات عمومی و تخصصی که در ۱۵ سؤال زبان تخصصی طرح شده است را به‌طور کامل در کتاب زبان تخصصی سری عمران بررسی کرده‌ایم. تعدادی از این لغات عبارتند از:

لغات تخصصی

صفحه ۸۴: *Coffer dame* - تست ۵۱ فصل سازه: *shear wall* - صفحه ۲۵: *Floor system* - تست ۴۹ فصل سازه: *collapse* - تست ۱۵ فصل سازه: *yield stress* - صفحه ۱۵: *torsion* - صفحه ۱۵: *rigid* ...

لغات عمومی مطرح شده در زبان تخصصی:

لغت ۳۶ درس ۶: *accumulate* - لغت ۴۵ درس ۱۰: *Postulate* - تست ۳ درس ۱۴: *admit* - لغت ۲۰ درس ۷: *divert* - لغت ۷ درس ۶: *Constrain* ...



سری عمران

## ریاضیات عمومی

### کارشناسی ارشد

همانطور که انتظار می‌رفت، پس از دو سال، رویکرد طراح سؤالات درس ریاضی به روابط منطقی و متناسب با یک آزمون استاندارد برگشت، به‌طوری‌که یک دانشجوی متوسط به آسانی قادر به پاسخگویی به بیش از ۳۵ درصد سؤالات بود.

اگر بخواهیم به‌طور دقیق‌تر سؤالات ریاضی آزمون ۹۳ را بررسی کنیم می‌توان گفت:

**ریاضی ۱:** سه سؤال آسان، یک سؤال متوسط و یک سؤال دشوار

**ریاضی ۲:** دو سؤال آسان، دو سؤال متوسط، یک سؤال دشوار

**معادلات دیفرانسیل:** دو سؤال آسان، یک سؤال متوسط و دو سؤال وقت‌گیر که پاسخگویی به آن در زمان محدود مشکل است.

شایان ذکر است که جهت پاسخگویی به سؤالات امسال ریاضی و معادلات، کلیدی‌ترین نکته، تشخیص است یعنی داوطلب باید تشخیص دهد که یک سؤال را حل کند، یا نباید حل کند و از آن عبور کند.

در رابطه با کتاب ریاضی (۱) و معادلات دیفرانسیل سری عمومی نیز قضاوت را به شما عزیزان می‌سپاریم. سؤالات مشابه و یا عیناً تکرار شده، در پاسخ‌ها مشخص شده است!!!

**گروه پاسخ دهندهگان:**

مسعود مهدیان، عباس تاجیک، مجید فرقانی



ریاضیات

۳۱- (۴)

اگر از رابطه  $x = \sin\left(\frac{\pi}{4}x^2\right) + f\left(\frac{x}{x+2}\right)$  نسبت به  $x$  مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$\left(\frac{(1)(x+2)-(1)(x)}{(x+2)^2}\right)f'\left(\frac{x}{x+2}\right) + \frac{\pi}{4}(2x)\cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right) = 1(*)$$

حال به صورت مسئله دقت می‌کنیم. خواسته مسئله  $f'\left(\frac{1}{4}\right)$  می‌باشد.

قاعدتاً چون  $f'\left(\frac{x}{x+2}\right)$  داریم برای رسیدن به  $f'\left(\frac{1}{4}\right)$  باید بنویسیم:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x = x+2 \Rightarrow x = 2$$

با جایگذاری  $x = 2$  در رابطه (\*) داریم:

$$\left(\frac{4-2}{(2+2)^2}\right)f'\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{4}(4)\cos(\pi) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}f'\left(\frac{1}{4}\right) - \pi = 1 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 + 4\pi$$

این تست مشابه تمرین‌های ۱۸ و ۱۹ و تست ۱۲ از فصل سوم در کتاب ریاضی عمومی ۱ سری عمومی، مشتق تابع در یک نقطه را پرسیده است.

اندازه مشتق  $y = \tanh^{-1}(\sin 2x)$  در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

۱)  $\frac{1}{2}$       ۲) ۲      ۳) ۴      ۴) تعریف نشده

هله: برای محاسبه مشتق تابع فوق، از رابطه مشتق  $\tanh^{-1}u$  که در جدول (e) آورده شده است استفاده می‌کنیم:

$$y = \tanh^{-1}u \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$y = \tanh^{-1}(\sin 2x) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} y' = \frac{2 \cos 2x \rightarrow u'}{1 - \sin^2 2x \rightarrow 1-u^2}$$

$$\Rightarrow y'(x = \frac{\pi}{6}) = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{1 - \sin^2(\frac{\pi}{3})} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مشتق تابع  $f(x) = e^{\sin x} \times \ln x$  در  $x = \frac{\pi}{4}$ ، کدام است؟

۱)  $\frac{2e}{\pi}$       ۲)  $\frac{2\pi}{e}$       ۳)  $\frac{\pi}{2} + \ln \frac{\pi}{2}$       ۴)  $\frac{2}{\pi}e + \ln \frac{\pi}{2}$

هله: از رابطه مشتق حاصل ضرب، استفاده می‌کنیم:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$f(x) = e^{\sin x} \times \ln x \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} f'(x) = \underbrace{\cos x}_{u'} \cdot \underbrace{e^{\sin x}}_v + \underbrace{e^{\sin x}}_u \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}$$

در ادامه با جایگذاری  $x = \frac{\pi}{4}$  در رابطه فوق داریم:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\text{صفر}} \times e^{\sin \frac{\pi}{4}} \times \ln \frac{\pi}{4} + e^{\sin \frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = e \times \frac{4}{\pi} = \frac{4e}{\pi}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.



۳۲- (۱)

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\ln 2} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx &= \int \frac{\ln x}{\ln 2} \frac{(1+e^{-2x})-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx = \int \frac{\ln x}{\ln 2} \left(1 - \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) dx = \int \frac{\ln x}{\ln 2} dx + \int \frac{\ln x}{\ln 2} \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx \\ &= (\ln x - \ln 2) + \ln(1+e^{-2x}) \left| \frac{\ln x}{\ln 2} \right| = (\ln x - \ln 2) + \left[ \ln(1+e^{-2\ln x}) - \ln(1+e^{-2\ln 2}) \right] \\ &= \ln x - \ln 2 + \ln \frac{1}{9} - \ln \frac{5}{4} = \ln x - \ln 2 + \ln \frac{4}{9} - \ln \frac{5}{4} = \ln x - \ln 2 + \ln \frac{16}{45} = \ln x - \ln 2 + \ln 16 - \ln 45 = \ln x - \ln 2 + 2\ln 4 - \ln 9 - \ln 5 = \ln x - \ln 2 + 2\ln 2 - \ln 3 - \ln 5 = \ln x - \ln 2 - \ln 3 - \ln 5 + 2\ln 2 = \ln x - \ln 3 - \ln 5 + \ln 2 \end{aligned}$$

این تست مشابه تمرین ۲۴ از فصل پنجم کتاب ریاضی عمومی ۱ سری عمومی بوده است.

حاصل انتگرال  $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2} \ln(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + c$  (۲)  $\frac{1}{2} \ln(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) + c$  (۳)  $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + e^{-2x}) + c$  (۴)  $2 \ln(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + c$

هله: با توجه به نکته فوق، از تغییرمتغیر  $u = e^x$  استفاده می‌کنیم:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \xrightarrow{u=e^x} dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = \int \frac{u-1}{u+1} \frac{du}{u} = \int \frac{u-1}{u(u+1)} du$$

در ادامه کسر موجود را تجزیه می‌کنیم:

$$\int \frac{u-1}{u(u+1)} du \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \int \left( \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u} \right) du = 2 \ln|u+1| - \ln|u| + c = \ln(u+1)^2 - \ln u + c$$

$$\xrightarrow{u=e^x} \ln(e^x+1)^2 - \ln e^x + c = \ln \frac{(e^x+1)^2}{e^x} + c = \ln \left( \frac{e^x+1}{e^{\frac{x}{2}}} \right)^2 + c$$

$$= 2 \ln \frac{e^x+1}{e^{\frac{x}{2}}} + c = 2 \ln \left( e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) + c$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۳۳- (۳)

به انتگرال  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-\cos \sqrt{x})^\alpha}$  توجه کنید. واضح است که حدود انتگرال‌ها  $\infty$  نمی‌باشد. پس ناسرگی نوع اول نداریم.

از طرفی ریشه مخرج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$1 - \cos \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

و چون  $x = 0$  حد پایینی انتگرال است، ناسرگی نوع دوم داریم و با استفاده از هم‌ارزی در این نقطه می‌توان نوشت:

$$1 - \cos \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - \left(1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2}\right) \sim \frac{x}{2}$$

بنابراین در  $x = 0$  (به عنوان نقطه‌ای با وضعیت ناسرگی) داریم:

$$I \sim \int_0^{a>0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha} = \int_0^{a>0} \frac{2^\alpha}{x^\alpha} dx$$

حال دقت داریم با توجه به آزمون  $P$  در انتگرال‌های ناسره به صورت  $\int_0^{a>0} \frac{dx}{x^P}$  که برای  $1 < P$  همگرا و برای  $P \geq 1$  واگرا هستند بنابراین در این

تست انتگرال  $\int_0^{a>0} \frac{dx}{x^\alpha}$  برای  $\alpha < 1$  همگرا و برای  $\alpha \geq 1$  واگراست. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

این تست مشابه تمرین ۳۳ و تست‌های ۹۲ و ۹۳ از فصل ششم کتاب ریاضی عمومی ۱ سری عمومی بوده است. (ابتدا از هم‌ارزی و سپس از همگرایی استفاده می‌کنیم)

با فرض آنکه  $\alpha > \beta$  باشد، برای آنکه  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$  همگرا باشد، باید داشته باشیم:

(۱)  $\beta < 1, \alpha > 1$  (۲)  $\beta > 1, \alpha > 1$  (۳)  $\beta < -1, \alpha < -1$  (۴)  $\beta < -1, \alpha > -1$

هاله با سؤال بسیار جالبی روبرو شده‌ایم. برای یافتن حدود  $\alpha$  و  $\beta$ ، به موارد زیر توجه کنید:

۱- این انتگرال هم در صفر و هم در بی‌نهایت ناسرگی دارد (دقت شود که  $x=0$  مجانب قائم تابع تحت انتگرال است). بنابراین با توجه به نکات بیان شده، انتگرال را می‌شکنیم:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} = \int_0^2 \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

عدد دلخواه در بازه  $\leftarrow$  (I) ناسره نوع دوم  $\rightarrow$  (II) ناسره نوع اول  $\rightarrow$

۲- در انتگرال (I) از هم‌ارزی در صفر و در انتگرال (II) از هم‌ارزی در بی‌نهایت استفاده می‌کنیم و در نهایت با توجه به آزمون انتگرال  $p$ ، داریم:

(I):  $\int_0^2 \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\beta}$  (در صفر هم‌ارز با توان کوچک‌تر است)

$\Rightarrow$  شرط همگرایی  $\beta < 1$  است. انتگرال  $p$  ناسره نوع دوم  $\Rightarrow$  انتگرال هم‌ارز  $= \int_0^2 \frac{dx}{x^\beta}$

(II):  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha}$  (در بی‌نهایت هم‌ارز با توان بزرگ‌تر است)

$\Rightarrow$  شرط همگرایی  $\alpha > 1$  است. انتگرال  $p$  ناسره نوع اول  $\Rightarrow$  انتگرال هم‌ارز  $= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

۲- در انتها می‌توان گفت که انتگرال موردنظر، زمانی همگراست که هر دو انتگرال (I) و (II) همگرا باشند، پس شروط همگرایی هر دو باید همزمان برقرار شوند (یعنی  $\alpha > 1$  و  $\beta < 1$ )، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۳۴- (۳)

واضح است در هر عدد مختلط به صورت  $Z = A + iB$  شرط حقیقی بودن عدد مختلط این است که  $B = 0$  باشد. حال به مسئله برمی‌گردیم. برای به توان رساندن عدد مختلط (معمولاً) به سراغ فرم قطبی (یا نمایی) اعداد مختلط می‌رویم. داریم:

$$z = 3 + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Diagram showing a point in the first quadrant with } x=3, y=\sqrt{3}, \text{ forming a right triangle with hypotenuse } r=2\sqrt{3} \text{ and angle } \theta = \frac{\pi}{6}. \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

حال می‌توان با استفاده از فرم نمایی نوشت:

$$(3 + i\sqrt{3})^n = (2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}})^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \xrightarrow{e^{ix} = \cos x + i \sin x} = (2\sqrt{3})^n \left( \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

واضح است برای حقیقی بودن عدد مختلط باید،  $\sin \frac{n\pi}{6} = 0$  برابر صفر شود:

$$\sin \frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین باید  $n = 6k$  باشد و با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۳) صحیح می‌باشد. زیرا ۱۳۹۲ ضریبی از عدد ۶ است.

این تست مشابه تمرین‌های ۴ و ۴۲ از فصل نهم در کتاب ریاضی عمومی ۱ سری عمومی بوده است.

اگر عدد مختلط  $\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$  فاقد جزء حقیقی باشد،  $\theta$  کدام است؟

$\frac{\pi}{6}$  (۱)       $\frac{\pi}{4}$  (۲)       $\frac{\pi}{3}$  (۳)       $\frac{\pi}{2}$  (۴)

حل: همانطور که مشاهده می‌کنید با یک کسر مختلط روبرو هستیم و مشابه با تمرین قبل، ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا کسر ساده‌تر شود:

$$z = \frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} \times \frac{1+2i\sin\theta}{1+2i\sin\theta} = \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta+\cancel{4i^2\sin^2\theta}}{1-(2i\sin\theta)^2} \stackrel{i^2=-1}{=} \frac{3+8i\sin\theta}{1-4\sin^2\theta}$$

$$z = \frac{(3-4\sin^2\theta)+8i\sin\theta}{1-4\sin^2\theta} = \left(\frac{3-4\sin^2\theta}{1-4\sin^2\theta}\right) + \left(\frac{8\sin\theta}{1-4\sin^2\theta}\right)i$$

→ مؤلفه موهومی      ← مؤلفه حقیقی

در نهایت با توجه به خواسته مسئله، قسمت حقیقی آن را برابر صفر قرار داده و  $\theta$  موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$Re(z) = 0 \Rightarrow \frac{3-4\sin^2\theta}{1-4\sin^2\theta} = 0 \xrightarrow[\text{صورت کسر باید صفر شود}]{\text{مخرج} \neq 0} 3-4\sin^2\theta = 0 \Rightarrow 4\sin^2\theta = 3$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{k=0} \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

چنانچه  $z = e^{i\theta}$  فرض شود، قسمت حقیقی  $w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$  برابر است با:

$\pm\sqrt{2\tan\frac{\theta}{2}}$  (۱)       $\pm\sqrt{\tan\theta}$  (۲)       $\pm\sqrt{\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}}$  (۳)       $\pm\sqrt{2\cot\theta}$  (۴)

هله ابتدا  $z$  را در معادله فوق جایگذاری می‌کنیم:

$$w = \sqrt{\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}} \xrightarrow[\text{رابطه اوایل}]{=} \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}}$$

با استفاده از اتحادهای زیر، داریم:

$$\Rightarrow 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$w = \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2})}} \rightarrow -i\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}{-i\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{i}\sin\frac{\theta}{2})}} = \sqrt{\frac{-1}{i} \frac{\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}} \xrightarrow{i \rightarrow -i}$$

بنابراین،  $w$  برابر است با:

$$w = \sqrt{i \cot\frac{\theta}{2}} = \sqrt{i} \times \sqrt{\cot\frac{\theta}{2}}$$

در ادامه برای تعیین قسمت حقیقی  $w$ ، ابتدا باید  $\sqrt{i}$  را به دست آوریم:

$$z = \sqrt{i} \Rightarrow z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, k = 0, 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ k=1 \Rightarrow z = e^{i\frac{5\pi}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (**)$$

و در نتیجه می توان  $w$  را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$w = \sqrt{i} \times \sqrt{\cot \frac{\theta}{2}} \xrightarrow{(*)} w = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cot \frac{\theta}{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\cot \frac{\theta}{2}} \Rightarrow w = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2}}$$

$$Re(w) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2}}$$

در نهایت قسمت حقیقی  $w$ ، برابر است با:

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۳۵- (۴)

روش اول: می خواهیم حاصل یک سری ساده (اما به نظر سخت) به صورت زیر را بیابیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

منطقی است حاصل این سری تقریباً  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \approx 0.75$  و یا به صورت یکم دقیقتر  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{25}{28} \approx 0.9$  و یا با دقت بیشتر

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 2 \approx 0.7 \\ \pi \approx 3 \\ \sqrt{3} \approx 1.7 \end{array} \right. \quad \text{بنابراین با}$$

$$\frac{\ln 2}{3} \approx \frac{0.7}{3} = \frac{7}{30} \approx 0.22$$

توجه به گزینه ها (که همگی  $\frac{\ln 2}{3}$  دارند) می نویسیم:

تا اینجا می توان به نادرستی گزینه های دوم و سوم که از  $0.22$  کمتر هستند پی برد. بین گزینه های ۱ و ۴ به دنبال مقدار تقریبی  $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$  و  $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$  می باشیم.

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{3}{6 \times 1.7} = \frac{1}{3.4} = \frac{10}{34} \approx 0.3$$

$$\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \approx 0.22 + 0.3 \approx 0.52$$

بنابراین مقدار تقریبی گزینه اول چنین است:

که گزینه ای غلط می باشد (زیرا نزدیک به عدد  $0.8$  نمی باشد) و تنها گزینه (۴) صحیح می باشد. البته برای گزینه چهارم داریم:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{3 \times 1.7}{9} = \frac{17}{30}$$

$$\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx \frac{7}{30} + \frac{17}{30} = \frac{24}{30} = 0.8$$

واضح است در گزینه چهارم:

روش دوم: سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$  را در نظر بگیرید:

$$\int x^{3n} dx = \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$$

با توجه به  $3n+1$  در مخرج به یاد انتگرال  $x^{3n}$  می افتیم:

از طرف دیگر از سری هندسی داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \underbrace{x^0}_{\times (-x^3)} - \underbrace{x^3}_{\times (-x^3)} + \underbrace{x^6}_{\times (-x^3)} - \underbrace{x^9}_{\times (-x^3)} + \dots = \frac{a_0}{1-q} = \frac{a_0=1}{q=-x^3} = \frac{1}{1+x^3}, \quad |x| < 1$$

و در نهایت با توجه به شرط  $|x| < 1$  از طرفین انتگرال  $\int_0^1$  می گیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3} \xrightarrow{\int_0^1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \left( \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3}} \right) \right) \Big|_0^1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \left( \frac{\pi}{6} \right) - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$$

یعنی  $\vec{a}$  هم موازی و هم عمود بر  $\vec{b} - \vec{c}$  است، که این اتفاق فقط برای بردار صفر رخ می‌دهد و داریم:

$$\vec{b} - \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

مطابق حد مجموع ریمان ها در انتگرال دوگانه می‌دانیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{i+j}{n}\right) = \int_0^1 \int_0^1 f(x+y) dx dy$$

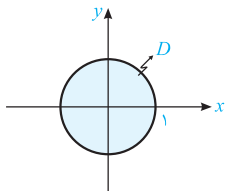
حال با فرض  $f\left(\frac{i+j}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi(i+j)}{n}\right)$  واضح است:

$$f(x+y) = \cos(\pi(x+y))$$

بنابراین حاصل حد موردنظر چنین است:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi(x+y) dx dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{\pi} \sin \pi(x+y) \right]_{x=0}^1 dy = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\sin \pi(1+y) - \sin \pi y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{\pi} (\cos \pi(1+y) - \cos \pi y) \right]_{y=0}^1 = \frac{-1}{\pi^2} ((\cos 2\pi - \cos \pi) - (\cos \pi - \cos 0)) = \frac{-1}{\pi^2} (1+1+1+1) = \frac{-4}{\pi^2} \end{aligned}$$

ناحیه انتگرال گیری و انتگرال خواسته شده چنین‌اند:



$$I = \iint_D \frac{\cos x}{\cos x + \cos y} dA$$

با توجه به تقارن ناحیه انتگرال گیری نسبت به متغیرهای  $x$  و  $y$  می‌توان نوشت:

$$I = \iint_D \frac{\cos y}{\cos x + \cos y} dA$$

حال می‌توان با یک ابتکار ساده نوشت:

$$I + I = \iint_D \frac{\cos x + \cos y}{\cos x + \cos y} dA \Rightarrow 2I = \iint_D dA \Rightarrow 2I = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \text{مساحت ناحیه } D = \pi$

انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\oint_C \underbrace{\left( \frac{-y}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right) \right)}_{F_1} dx + \underbrace{\left( \frac{x}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right) \right)}_{F_2} dy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Rightarrow \text{میدان } F \text{ پایستار است}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مسیر } C \text{ بسته} \\ \text{میدان القایی} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{صفر} = \text{جواب انتگرال}$$

روش اول: مطابق قضیه استوکس می‌دانیم:

اگر سطح فضایی  $S$  یک سطح باز و منحنی  $C$  منحنی لبه‌ای آن باشد، آنگاه:

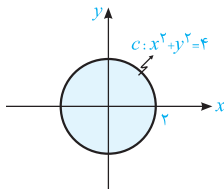
$$I = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds = \oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

که در آن  $C$  منحنی لبه‌ای آن است. بنابراین خواهیم داشت:

$$I = \oint_C (z - y) \, dx + (z + x) \, dy - (x + y) \, dz$$

که در آن  $C$  مرز بسته به‌صورت زیر است:



واضح است روی منحنی  $C$  داریم  $z = 0$  و  $dz = 0$  و بنابراین:

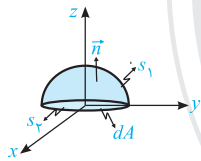
$$I = \oint_C -y \, dx + x \, dy$$

و مطابق قضیه گرین خواهیم داشت:

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) dx \, dy = 2 \iint_D dx \, dy = 2(D \text{ مساحت ناحیه}) = 8\pi$$

روش دوم: از نتیجه قضیه استوکس داریم:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \text{curl} F \cdot \vec{n} \, ds &= \iint_{S_1} \text{curl} F \cdot \vec{n} \, ds \\ \xrightarrow{\text{در صفحه } xoy} \begin{cases} ds \Rightarrow dA \\ \vec{n} \Rightarrow \vec{k} \end{cases} & \iint_{S_1} \text{curl} F \cdot \vec{k} \, dA = \iint_{S_1} (1 - (-1)) \, dA = 2 \iint_{S_1} dA = 2 \times (\text{مساحت } S_1) = 2 \times \pi (2)^2 = 8\pi \\ \text{انتگرال} & \iint_{S_1} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$



با تقسیم کردن معادله بر جمله  $(x+1)$  داریم:

$$y' - \frac{1}{x+1}y = e^x (x+1)$$

$$\mu(x) = e^{\int \left( \frac{-1}{x+1} \right) dx} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \left( \frac{1}{x+1} y \right)' = e^x \Rightarrow \frac{1}{x+1} y = e^x + C \xrightarrow{y(0)=1} C=0$$

$$y = (x+1)e^x \xrightarrow{x=1} y = 2e$$

این تست مشابه تمرین ۱۵ فصل اول کتاب معادلات دیفرانسیل سری عمومی بوده است.

حد جواب معادله دیفرانسیل  $ty' + (t+1)y = 2te^{-t}$ ، با شرط کمکی  $y(1) = a$  در نقطه  $t=0$  برابر با صفر است، هرگاه  $a$  برابر باشد با:

$$e \quad (۴) \qquad \frac{1}{e} \quad (۳) \qquad -e \quad (۲) \qquad -\frac{1}{e} \quad (۱)$$

هاله با کمی دقت می‌فهمیم که این معادله که در آن  $y$  تابع و  $t$  متغیر است، یک معادله مرتبه اول خطی می‌باشد. بنابراین ابتدا با استاندارد کردن معادله، عامل انتگرال‌ساز آن را به‌دست می‌آوریم:

$$ty' + (t+1)y = 2te^{-t} \xrightarrow{\div t} y' + \left(1 + \frac{1}{t}\right)y = 2e^{-t} \Rightarrow y' + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t}\right)}_{p(t)} y = \underbrace{2e^{-t}}_{q(t)}$$

$$\text{عامل انتگرال‌ساز: } M(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt} = e^{t + \ln t} = e^t \times t$$

$$\Rightarrow M(t) = e^t \times \underbrace{e^{\ln t}}_{=t} = e^t \times t \Rightarrow M(t) = te^t \text{ و}$$

در ادامه جواب معادله را از حل رابطه زیر به دست می آوریم:

$$(M(t)y)' = M(t)q(t) \xrightarrow{M(t)=te^t, q(t)=2e^{-t}} (te^t y)' = te^t \times 2e^{-t} \Rightarrow (te^t y)' = 2t$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} te^t y = \int 2t dt \Rightarrow te^t y = t^2 + c \xrightarrow{y(1)=a, y=a} 1 \times e^1 \times a = 1 + c \Rightarrow c = ae - 1$$

و در نهایت جواب معادله برابر است با:

$$te^t y = t^2 + ae - 1 \Rightarrow y = \frac{t^2 + ae - 1}{te^t}$$

در ادامه حد تابع را در  $t = 0$  محاسبه می کنیم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + ae - 1}{te^t} = \frac{ae - 1}{0}$$

اگر صورت کسر مخالف صفر باشد، با توجه به صفر شدن مخرج، جواب حد نامتناهی می شود، از این رو اگر بخواهیم حاصل حد برابر یک عدد باشد (مطابق فرض سؤال برابر صفر باشد)، حتماً باید حد صورت کسر نیز برابر صفر شود، تا حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  ایجاد شده و جواب نهایی حد، برابر عدد صفر شود. در نتیجه داریم:

$$ae - 1 = 0 \Rightarrow ae = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{e} \quad (\text{گزینه ۳})$$

توجه کنید که در صورت برقراری این شرط، حاصل حد برابر صفر می شود:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + ae - 1}{te^t} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{e^t + te^t} = \frac{0}{1} = 0$$

۴۲- (۴)

با یک معادله فاقد  $x$  روبرو هستیم، بنابراین داریم:

$$y' = u$$

$$y'' = u \frac{du}{dy}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} y \cdot u \frac{du}{dy} - u^2 = 0 \xrightarrow{\div u} y \frac{du}{dy} = u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \ln u = \ln y + C_1$$

$$\xrightarrow{u=y'} \ln y' = \ln y + C_1 \xrightarrow{x=1} \ln 2 = \ln 2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln \frac{2}{y}$$

$$\ln y' - \ln y = \ln \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{y} dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \ln y = \frac{2}{y} x + C_2 \xrightarrow{y(1)=2} \ln 2 = \frac{2}{y} + C_2 \Rightarrow C_2 = \ln 2 - \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{2}{y} x + \ln 2 - \frac{2}{y} \xrightarrow{x=2} \ln y = \frac{4}{y} + \ln 2 - \frac{2}{y} \Rightarrow \ln y = 2 + \ln 2 \Rightarrow y = 2e^2$$

این تست مشابه تمرین ۱۴ فصل دوم کتاب معادلات دیفرانسیل سری عمومی بوده است.

جواب عمومی معادله های دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (۱)$$

همانطور که مشاهده می کنید، با دو معادله مرتبه دوم غیرخطی و فاقد  $x$  روبرو شده ایم. در ادامه به صورت جداگانه آنها را حل می کنیم:

مطابق دستورالعمل، از تغییر متغیرهای  $y' = u$  و  $y'' = u \frac{du}{dy}$  استفاده می کنیم و داریم:

$$yy'' + (y')^2 = 0 \xrightarrow{\text{تبدیل می شود به}} y \cdot u \frac{du}{dy} + u^2 = 0 \xrightarrow{\div u} y \frac{du}{dy} + u = 0 \Rightarrow y du = -u dy$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$$

همانطور که مشاهده می کنید، به یک معادله تفکیک پذیر از مرتبه اول رسیده ایم که برای حل آن از دو طرف رابطه انتگرال می گیریم:

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری از طرفین}} \int \frac{du}{u} = - \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |u| = -\ln |y| + \ln c_1 = \ln \left| \frac{c_1}{y} \right| \xrightarrow{\exp} u = \frac{c_1}{y}$$

عدد ثابت را به فرم  $\ln c_1$  می نویسیم تا محاسبات ساده تر انجام شود.

در ادامه با جایگذاری  $u = y'$  در رابطه به دست آمده،  $y$  را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \frac{c_1}{y} \xrightarrow{y' = \frac{dy}{dx}} \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y} \Rightarrow y dy = c_1 dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \int y dy = c_1 \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = c_1 x + c_2 \Rightarrow y^2 = 2c_1 x + 2c_2 \Rightarrow y^2 = c_1' x + c_2'$$

**کمی توجه:** از آنجا که  $c$  یک عدد ثابت است،  $e^c$ ،  $\ln c$  و ... همگی عدد ثابت محسوب می‌شوند و با توجه به نوع رابطه‌ای که به آن رسیدیم، باید عدد ثابت برای معادله انتخاب کنیم. به طور مثال به معادلات زیر توجه کنید:

$$\ln |u| = \text{عدد ثابت} + \ln y \xrightarrow[\text{به صورت } \ln c \text{ انتخاب شود.}]{\text{بهرتر است عدد ثابت}} \ln |u| = \ln c + \ln y = \ln cy \xrightarrow{\exp} u = cy$$

$$e^y = \text{عدد ثابت} \times e^x \xrightarrow[\text{به صورت } e^c \text{ انتخاب شود.}]{\text{بهرتر است عدد ثابت}} e^y = e^c \times e^x = e^{c+x} \xrightarrow{\ln \text{ می‌گیریم}} y = c + x$$

۴۳- (۳)

برای بازنویسی مشتقات تابع می‌نویسیم:

$$x = \tan t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (1 + \tan^2 t) = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cos^2 t = \cos^2 t y'$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\cos^2 t y') = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \cos^2 t \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \cos^2 t - 2 \cos t \sin t \frac{dy}{dt} \right) \cos^2 t = \cos^4 t y'' - 2 \cos^3 t \sin t y'$$

حال با بازنویسی معادله دیفرانسیل  $y'' + y = 0$  به دست می‌آوریم:

$$(1 + \tan^2 t) (\cos^4 t y'' - 2 \cos^3 t \sin t y') + (1 + 2 \tan t) (\cos^2 t y') + y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 t} (\cos^4 t y'' - 2 \cos^3 t \sin t y') + (1 + 2 \tan t) (\cos^2 t y') + y = 0$$

$$\Rightarrow y'' - 2 \tan t y' + y + 2 \tan t y' + y = 0 \Rightarrow y'' + y = 0$$

این تست مشابه تمرین ۴ فصل پیوست کتاب معادلات دیفرانسیل سری عمومی بوده است.

با تغییر متغیر  $t = \cos x$ ، معادله دیفرانسیل  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cot x + y = 0$  به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟

$$(1-t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0 \quad (2)$$

$$(1-t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (1)$$

$$(1-t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0 \quad (4)$$

$$(1-t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (3)$$

هله برای پاسخ به این سؤال، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱- با توجه به گزینه‌ها، باید ارتباط  $\frac{dy}{dx}$  با  $\frac{dy}{dt}$  و همچنین  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  با  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  را به دست آوریم:

۲- برای پیدا کردن ارتباط  $\frac{dy}{dx}$  و  $\frac{dy}{dt}$ ، از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \quad (I)$$

$$\text{سؤال صورت } t = \cos x \xrightarrow{\text{مشتق از طرفین}} \frac{dt}{dx} = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} \xrightarrow{\cos x = t} \frac{dt}{dx} = -\sqrt{1-t^2}$$

$$(I) \text{ در } \frac{dt}{dx} \text{ جایگذاری: } \frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-t^2} \frac{dy}{dt} \quad (II)$$

۳- برای پیدا کردن ارتباط  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  با  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  و  $\frac{dy}{dt}$ ، از طرفین رابطه (II) یک بار دیگر مشتق می‌گیریم:

$$t = \cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dt}{dx} = -\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d^2 t}{dx^2} = -\cos x = -t$$

$$\frac{dt}{dx} \text{ و } \frac{d^2 t}{dx^2} \text{ جایگذاری: } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dt} \times (-t) + \frac{d^2 y}{dt^2} \times (-\sqrt{1-t^2})^2 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -t \frac{dy}{dt} + (1-t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (III)$$

۴- پس از جایگذاری  $\frac{dy}{dx}$  و  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، بهسادگی معادله جدید حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cot(x) + y = 0$$

معادله داده شده

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری (II) و (III)}} (-t \frac{dy}{dt} + (1-t^2) \frac{d^2y}{dt^2}) + (-\sqrt{1-t^2} \frac{dy}{dt}) \left( \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) + y = 0$$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\Rightarrow (1-t^2) \frac{d^2y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} - t \frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow (1-t^2) \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (\text{گزینه ۱})$$

#### ۴۴- (۱)

با تقسیم معادله بر  $x$  داریم:

$$y'' + \frac{3-x}{x} y' - \frac{1}{x} y = 0$$

واضح است  $P(x) = \frac{3-x}{x}$  و  $Q(x) = \frac{-1}{x}$  می‌باشد و نقطه تکین معادله  $x=0$  می‌باشد. حال داریم:

$$P_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x-0) P(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3-x) = 3$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x-0)^2 q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$\text{معادله مشخصه: } m(m-1) + 3m + 0 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m = 0, m = -2$$

ریشه کوچکتر  $\rightarrow$

بنابراین پایه جواب مربوط به ریشه کوچکتر معادله دیفرانسیل به ازای  $\lambda = 0$  به صورت  $y = (x-0)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (x-0)^n$  می‌باشد و با جایگذاری این

جواب  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2}$  در معادله دیفرانسیل به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{x y'' + (3-x) y' - y = 0} x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-2)(n-3) x^{n-4} + (3-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-2) x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-2)(n-3) x^{n-3} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-2) x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-2) x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2} = 0$$

حال با تبدیل  $n-2 \rightarrow N-3$  یا  $n-1 \rightarrow N-1$  در سری‌های دوم و سوم به دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \{(n-2)(n-3) + 3(n-2)\} x^{n-3} + \sum_{N=1}^{\infty} (-a_{N-1}(N-3) x^{N-2} - a_{N-1} x^{N-2}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ((n^2 - 2n) a_n + (2-n) a_{n-1}) x^{n-3} = 0 \Rightarrow (n^2 - 2n) a_n = (n-2) a_{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n}; n \neq 2$$

این تست مشابه تمرین ۳۶ فصل سوم کتاب معادلات دیفرانسیل سری عمومی بوده است.

ضرایب سری پاسخ معادله دیفرانسیل  $y'' - 7xy' + 16y = 0$  حول  $x=0$  در کدام گزینه صدق می‌کند؟

$$a_{n+2} = -\frac{(n-4)(n-3)}{3(n+1)(n+2)} a_n \quad (2)$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-4)^2}{3(n+1)(n+2)} a_n \quad (4)$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n-4)^2}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (1)$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n-4)^2}{3(n+1)(n+2)} a_n \quad (3)$$

هله ابتدا معادله را به فرم استاندارد می نویسیم:

$$y'' - \frac{7x}{x^2+3} y' + \frac{16}{x^2+3} y = 0$$

$\xrightarrow{p(x)}$        $\xrightarrow{q(x)}$

از آنجا که  $x=0$  برای معادله فوق یک نقطه عادی است، جواب معادله به صورت یک سری توانی به فرم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  است و برای رسیدن به جواب گام های زیر را طی می کنیم:

گام اول: از این جواب مشتق گرفته و در معادله جایگذاری می کنیم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

جایگذاری در معادله  $\rightarrow (x^2+3) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 7x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 16 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 7n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 16 c_n x^n = 0$$

گام دوم: با استفاده از قاعده لغزاندن توان  $x$  در سیگمای دوم را با بقیه یکسان می کنیم:

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 7n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 16 c_n x^n = 0$$

گام سوم: با جداسازی بعضی از جملات سری ها، اندیس پایین سری ها را یکسان می کنیم:

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \underbrace{3(2)(1) c_2}_{n=0} + \underbrace{3(3)(2) c_3 x}_{n=1} + \sum_{n=2}^{\infty} 3(n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 7n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 16 c_n x^n = 0$$

$$-7c_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} 7n c_n x^n + 16c_0 + 16c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 16 c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)c_n + 3(n+2)(n+1)c_{n+2} - 7n c_n + 16c_n) x^n + (16c_0 + 9c_1)x + 16c_2 = 0$$

بنابراین داریم:

$$\underbrace{(n^2 - 4n + 16)}_{(n-4)^2} c_n + 3(n+2)(n+1) c_{n+2} = 0 \Rightarrow c_{n+2} = \frac{-(n-4)^2}{3(n+2)(n+1)} c_n \quad (\text{گزینۀ ۳})$$

(۴) - ۴۵

انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow{\text{لاپلاس می گیریم}} \mathcal{L} \left( \int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{\sin t}{t} dt \right)$$

$$= \mathcal{L} \left( e^x * \frac{\sin x}{x} \right) = \mathcal{L}(e^x) \mathcal{L} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{s-1} \cdot \int_s^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{s-1} \cdot \arctan s \Big|_s^{\infty} = \frac{1}{s-1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan s \right) = \frac{1}{s-1} \cdot \arctan \frac{1}{s}$$

$\xrightarrow{\arctan \frac{1}{s}}$

$$f(x) = e^x \int_0^x e^{-t} \frac{1}{t} \sin t dt$$

روش دوم:

به ترتیب از داخل انتگرال لاپلاس می گیریم. داریم:

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{1+s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \sin t\right\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{1+s^2} dx = \arctan s \Big|_s^{\infty} = \arctan \infty - \arctan s = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{-t} \frac{1}{t} \sin t dt\right\} = \arctan \frac{1}{s} \Big|_{s \rightarrow s+1} = \arctan \frac{1}{s+1} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{-t} \frac{1}{t} \sin t dt\right\} = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^x \int_0^x e^{-t} \frac{1}{t} \sin t dt\right\} = \left( \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s+1} \right) \Big|_{s \rightarrow s-1} = \frac{1}{s-1} \arctan \frac{1}{s}$$

این تست مشابه تمرین ۲۶ فصل چهارم کتاب معادلات دیفرانسیل سری عمومی بوده است. همچنین می‌توان از نتیجه تمرین ۱۷ در مل این سؤال استفاده کرد.

تبدیل لاپلاس  $f(x) = 2e^x \int_0^x e^{-t} \sin^2 t \, dt$  کدام است؟

$$(1) \frac{4}{s(s-1)(s^2+4)} \quad (2) \frac{4}{s(s+1)(s^2+4)} \quad (3) \frac{4}{(s-1)(s^2+4)} \quad (4) \frac{4}{(s+1)(s^2+4)}$$

هله در نگاه اول و با کمی دقت می‌توان فهمید که عبارت داده شده مشابه تعریف کانولوشن دو تابع  $e^t$  و  $\sin^2 t$  است:

$$\int_0^x e^{-t} \sin^2 t \, dt = \int_0^x e^{x-t} \sin^2 t \, dt \quad \text{انتگرال نسبت به } t \text{ است، پس می‌توان } e^x \text{ را به داخل انتگرال برد (I)}$$

در ادامه برای محاسبه لاپلاس تابع داده شده، ابتدا لاپلاس توابع  $e^t$  و  $\sin^2 t$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^t) &= \frac{1}{s-1}, \quad \mathcal{L}(\sin^2 t) \stackrel{\text{روابط مثلثاتی}}{=} \mathcal{L}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\cos 2t)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \quad (II) \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از نتایج (I) و (II) داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(2e^x \int_0^x e^{-t} \sin^2 t \, dt\right) &\stackrel{(I)}{=} 2\mathcal{L}(e^t * \sin^2 t) = 2\mathcal{L}(e^t) \times \mathcal{L}(\sin^2 t) \\ &\stackrel{(II)}{=} 2 \times \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \stackrel{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{s^2+4-s^2}{s(s-1)(s^2+4)} = \frac{4}{s(s-1)(s^2+4)} \quad (1) \end{aligned}$$

تبدیل لاپلاس تابع  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  کدام است؟

$$(1) -\arctan s \quad (2) -\arctan \frac{1}{s} \quad (3) \arctan \frac{1}{s} \quad (4) \arctan s - \frac{\pi}{2}$$

هله با توجه به مشاهده  $t$  در مخرج  $\sin t$ ، برای محاسبه لاپلاس  $f(t)$ ، از تکنیک پنجم کمک می‌گیریم. برای این منظور ابتدا  $\frac{1}{t}$  را حذف کرده و سپس تبدیل لاپلاس عبارت باقی‌مانده را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) \xrightarrow{\text{حذف } \frac{1}{t}} \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$$

در ادامه با انتگرال‌گیری از عبارت به‌دست آمده داریم:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du = \tan^{-1} u \Big|_s^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \tan^{-1} u - \tan^{-1} s = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1} \frac{1}{s} = \arctan \frac{1}{s} \quad (3) \text{ گزینه}$$



سری عمران

## مکانیک جامدات

### کارشناسی ارشد

#### و اما مکانیک جامدات:

لازم است در ابتدا بگوییم که طراح سؤالات درس مقاومت مصالح امسال، تست‌های مناسب و معقولی را طرح کرده بود ولی متأسفانه تست‌های ۴۸ و ۵۴ کمی دارای ایراد علمی بود. می‌توان حدس زد که تست‌های این درس تا حدودی باعث افزایش روحیه شما در جلسهٔ آزمون شده است. در مورد تحلیل سازه اگر نخواهیم از انصاف بگذریم، اول باید گفت که با طراح یا طراحان بسیار باهوشی روبرو هستیم که کلک‌ها و نکات تحلیل سازه را به خوبی بلد هستند و این موضوع سطح سؤالات این درس را بالا برده است (متوسط رو به سخت). ایرادی که می‌توان از طراحان این درس گرفت آن است که تست‌های طرح شده، برای دانشجویان متوسط و ضعیف، در زمان کنکور قابل حل نمی‌باشد. کتاب تحلیل سازهٔ سری عمران، انصافاً امسال پوشش بسیار خوبی بر روی سؤالات داشت و حل تست‌هایش مهارت شما را برای این آزمون به حد قابل قبول می‌رساند. در مورد درس مقاومت مصالح نیز احتمالاً خودتان راحت می‌توانید قضاوت کنید!!

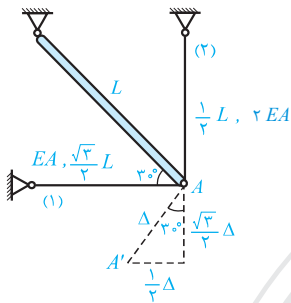
#### گروه پاسخ دهنده‌گان:

محمد آهنگر، نادر فنائی، حسین صباغیان

# تحلیل سازه‌ها و مقاومت مصالح

۴۶- (۴)

با توجه به روش ترسیمی ویلیو، نقطه A پس از بارگذاری به A' می‌رود و داریم:



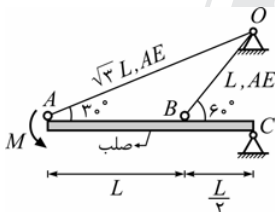
$$\Delta L_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta, \Delta L_1 = \frac{1}{2} \Delta$$

$$\Delta L = \frac{FL}{AE} \Rightarrow \frac{\Delta L_2}{\Delta L_1} = \frac{F_2}{F_1} \times \left( \frac{L_2}{L_1} \right) \times \frac{(AE)_1}{(AE)_2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{F_2}{F_1} \times \frac{\frac{1}{2} L}{\frac{\sqrt{3}}{2} L} \times \frac{(AE)}{(2AE)} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 6 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{6}$$

این تست مشابه تست ۱۶ در صفحه ۱۶۳ کتاب سری عمران بوده است.

در سازه زیر نیروی ایجاد شده در میله OA چند برابر میله OB می‌باشد؟



(۱) برابر  $\sqrt{3}$

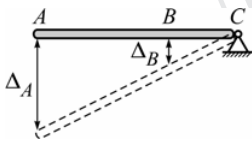
(۲) برابر  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) برابر ۲

(۴) نیروی میله‌ها برابرند.

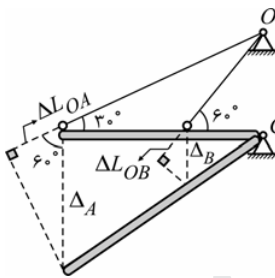
گزینه (۴)

با توجه به بارگذاری وارد بر میله صلب، این میله به سمت پایین حرکت کرده و داریم:



$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\frac{3L}{2}}{\frac{L}{2}} = 3 \Rightarrow \Delta A = 3\Delta B$$

از سوی دیگر رابطه بین تغییر طول دو میله و تغییر مکان نقاط A و B با توجه به تمرین (۲-۱۰) در درس‌نامه عبارت است از:



$$\Delta L_{OA} = \Delta A \cos 60^\circ$$

$$\Delta L_{OB} = \Delta B \cos 30^\circ$$

$$\frac{\Delta L_{OA}}{\Delta L_{OB}} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \times \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Delta L = \frac{FL}{AE} \Rightarrow \frac{\Delta L_{OA}}{\Delta L_{OB}} = \frac{F_{OA}}{F_{OB}} \times \frac{L_{OA}}{L_{OB}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{F_{OA}}{F_{OB}} \times \frac{\sqrt{3}L}{L} \Rightarrow \frac{F_{OA}}{F_{OB}} = 1$$

۴۷- (۲)

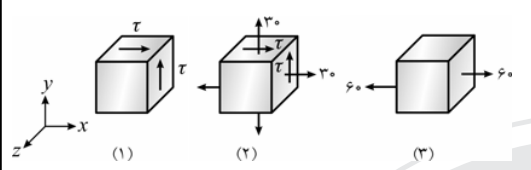
برای مقایسه کرنش حجمی دو المان می‌توان نوشت:

$$\epsilon_v = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\begin{cases} \text{المان (۱): } \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 + 40 + 0 = 80 \\ \text{المان (۲): } \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 80 + 0 + 0 = 80 \end{cases} \Rightarrow \epsilon_{v1} = \epsilon_{v2}$$

این تست عیناً نکته صفحه ۲۵ کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.

**نکته:** تنش‌های برشی در یک المان، تنها زوایای المان را تغییر داده و در المان هیچ‌گونه تغییر طولی در راستای  $x$  و  $y$  و همچنین تغییر سطح و تغییر حجمی ایجاد نمی‌کنند. با توجه به این موضوع، تغییر حجم المان (۱) برابر صفر و تغییر حجم المان‌های (۲) و (۳) با یکدیگر برابر و مخالف صفر است.



$$\epsilon V_1 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$\epsilon V_2 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{60(1-2\nu)}{E}$$

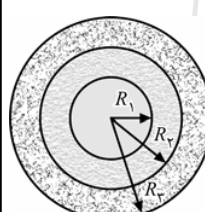
$$\epsilon V_3 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{60(1-2\nu)}{E}$$

(۳) - ۴۸

همانطور که می‌دانیم در اینگونه مثال‌ها،  $\tau_{max} \propto \rho G$  می‌باشد. در ادامه با فرض هم‌جنس بودن دو مقطع و یکسان بودن حد جاری شدن (که متأسفانه در سؤال نیامده است)، حالت بهینه زمانی برقرار می‌شود که  $\tau_{max_1} = \tau_{max_2}$  باشد و داریم:

$$\tau_{max_1} = \tau_{max_2} \Rightarrow \rho_1 G_1 = \rho_2 G_2 \Rightarrow R_1 G_1 = R_2 G_2 \Rightarrow \frac{R}{\gamma} G_1 = R G_2 \Rightarrow G_1 = 2 G_2$$

این تست مشابه تست ۳۷ در صفحه ۲۸۹ کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.



در مقطع یکپارچه مقابل که از سه نوع فلز تشکیل شده است، تحت اثر یک لنگر پیچشی، تنش برشی ماکزیمم ایجاد شده در قسمت‌های مختلف مقطع یکسان است. کدام رابطه زیر صحیح می‌باشد؟

$$G_1 R_1^3 = G_2 R_2^3 = G_3 R_3^3 \quad (1)$$

$$\frac{G_1}{R_1^3} = \frac{G_2}{R_2^3} = \frac{G_3}{R_3^3} \quad (2)$$

$$\frac{G_1}{R_1} = \frac{G_2}{R_2} = \frac{G_3}{R_3} \quad (3)$$

**گزینه (۱)**

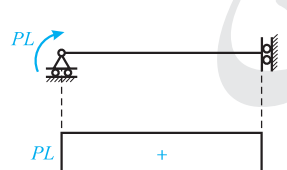
با توجه به توضیحات درس‌نامه، تنش برشی متناسب با  $\rho G$  می‌باشد و با توجه به این که تنش برشی ماکزیمم ایجاد شده در هر فلز در دورترین فاصله از مرکز برای آن رخ می‌دهد، داریم:

$$\tau_{max} \propto \rho G, \tau_{max_1} = \tau_{max_2} = \tau_{max_3} \Rightarrow \rho_{max_1} G_1 = \rho_{max_2} G_2 = \rho_{max_3} G_3$$

$$\Rightarrow R_1 G_1 = R_2 G_2 = R_3 G_3$$

(۳) - ۴۹

**روش اول:** برای محاسبه تغییر طول تار فوقانی با توجه به ثابت بودن لنگر خمشی، کافایت که کرنش تار فوقانی را در طول آن ضرب کنیم:



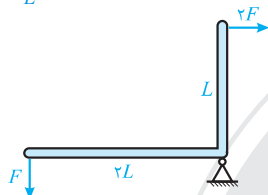
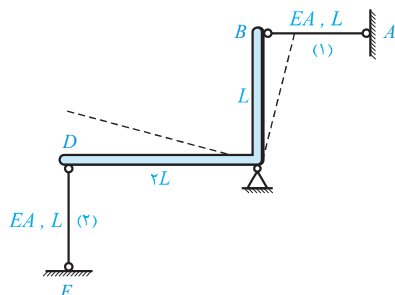
$$\epsilon_{top} = \frac{\sigma_{top}}{E} = \frac{(-\frac{My_{max}}{I})}{E} = -\frac{My_{max}}{IE}$$

$$\epsilon = -\frac{PL \times (\frac{\sqrt{2}}{2}a)}{(\frac{a^3}{12}) \times E} = -6\sqrt{2} \frac{PL}{a^3 E}$$

$$\Delta L = -6\sqrt{2} \frac{PL}{a^3 E} \times L = -6\sqrt{2} \frac{PL^2}{Ea^3}$$

**روش دوم:** می‌توان با کمک رابطه  $|\Delta L| = \left| \frac{y}{EI} \int_0^L M dz \right|$  نیز سؤال را حل کرد.

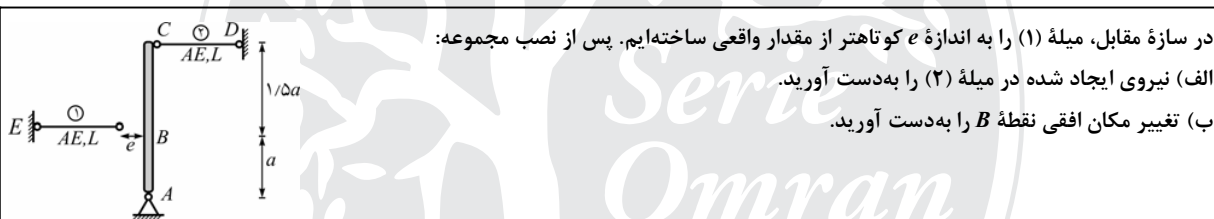
با توجه به صلب بودن نبشی، دوران آن با توجه به میله (۱) و میله (۲) یکسان بوده و با فرض دوران مثبت در جهت ساعتگرد داریم:



$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \frac{(F \times L)}{\frac{AE}{2L}} = \frac{\delta_o - \frac{2F \times L}{AE}}{L} \Rightarrow \frac{\Delta F}{AE} = \frac{2\delta_o}{L} \Rightarrow F = \frac{2}{5} \frac{AE \delta_o}{L}$$

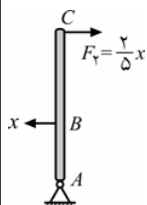
$$\begin{cases} F_{AB} = 2F = \frac{4}{5} \frac{AE \delta_o}{L} \\ F_{DE} = F = \frac{2}{5} \frac{AE \delta_o}{L} \end{cases}$$

این تست مشابه تمرین (۲-۳۳) در صفحه ۱۵۲ کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.



در سازهٔ مقابل، میله (۱) را به اندازهٔ  $e$  کوتاهتر از مقدار واقعی ساخته‌ایم. پس از نصب مجموعه:  
الف) نیروی ایجاد شده در میله (۲) را به دست آورید.  
ب) تغییر مکان افقی نقطهٔ  $B$  را به دست آورید.

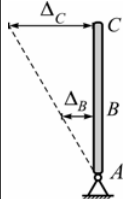
هله



الف) این سازه یک درجه نامعین بوده و در اثر خطاهای در حین ساخت ایجاد شده، در اعضاء نیروی داخلی ایجاد می‌شود. در صورتی که پس از نصب سازه نیروی میله (۱) را برابر  $x$  و به صورت کششی فرض کنیم، با لنگرگیری حول  $A$  نیروی میله (۲) برابر  $\frac{2}{5}x$  و کششی به دست می‌آید:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_v \times \frac{1}{5}a = x \times a \Rightarrow F_v = \frac{2}{5}x$$

از طرفی با توجه به تغییر شکل فرضی برای جسم صلب، رابطهٔ سازگاری بین تغییر شکل نقاط مختلف جسم صلب عبارت است از:



$$\frac{\Delta C}{\frac{1}{5}a} = \frac{\Delta B}{a} \Rightarrow \Delta C = \frac{2}{5}\Delta B$$

دقت شود که برای بررسی تغییر مکان‌ها، حرکت به سمت چپ را مثبت فرض کرده‌ایم. با توجه به این فرض، نیروی کششی میله (۱) باعث جابه‌جایی  $B$  به سمت راست شده و علامت آن منفی است. همچنین خطای ساخت  $e$  باعث جابه‌جایی به سمت چپ شده و علامت آن مثبت است.

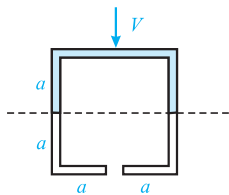
$$\Delta B = -\frac{xL}{AE} + e, \quad \Delta C = \frac{\frac{2}{5}xL}{AE}$$

$$\Delta C = \frac{2}{5}\Delta B \Rightarrow \frac{\frac{2}{5}xL}{AE} = \frac{2}{5}\left[-\frac{xL}{AE} + e\right] \Rightarrow x = \frac{25}{29} \frac{AEe}{L}$$

$$F_v = \frac{2}{5}x = \frac{10}{29} \frac{AEe}{L}$$

دقت شود که با توجه به مثبت به دست آمدن  $x$ ، جهت آن در ابتدای حل صحیح فرض شده است.

قطعه میانی ممان اینرسی‌اش حول محور افقی صفر بوده و تنش برشی آن نیز صفر است. از طرفی تنش برشی حداکثر در وسط ضلع قائم رخ می‌دهد و برابر است با:



$$I = 2 \times \frac{t(2a)^3}{12} + 2 \times (2at) \times a = \frac{16}{3} ta^3$$

$$Q_{max} = at \times \frac{a}{2} + 2at \times a + at \times \frac{a}{2} = 3a^2 t$$

$$\tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{I(2t)} = \frac{V \times (3a^2 t)}{\frac{16}{3} ta^3 \times (2t)} = \frac{9}{32} \frac{V}{at}$$

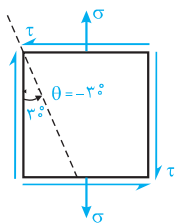
این تست مشابه تمرین (۵-۱۱۴) در صفحه ۱۴۹ کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.

در مقطع جدار نازک مقابل، با اضافه کردن عضو افقی میانی، مقطع (۱) را به مقطع (۲) تبدیل کرده‌ایم.

الف) تنش برشی ایجاد شده بر روی عضو اضافه شده چقدر است؟

ب) با این عمل تنش برشی حداکثر در مقطع چند برابر می‌شود؟

در صفحه (a-a) تنش برشی صفر است و داریم:



$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = +\sigma, \tau_{xy} = +\tau, \theta = -30^\circ, \tau_{\theta} = 0$$

$$0 = \frac{0 - \sigma}{2} \sin(2 \times (-30^\circ)) + (+\tau) \times \cos(2 \times (-30^\circ))$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma + \frac{1}{2} \tau \Rightarrow \left| \frac{\tau}{\sigma} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

این تست مشابه تمرین ۱-۱۹ در صفحه ۳۱ و تمرین ۱-۲۵ در صفحه ۳۹ کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.

در المان تنش مثلثی مقابل با توجه به وضعیت تنش بر روی صفحه مایل، تنش  $\sigma_x$  بر حسب  $a$  چقدر است؟

هاله در این المان برای رسیدن از محور قائم به صفحه مایل نشان داده شده، به اندازه  $30^\circ$  درجه و در جهت مثلثاتی می‌چرخیم. با توجه به این موضوع و دانستن مقدار  $\tau_{\theta}$  مقدار  $\sigma_x$  عبارت است از:

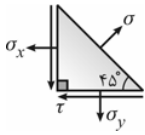
$$\begin{cases} \theta = +30^\circ \\ \tau_{xy} = +a \text{ (دوران المان در جهت ساعتگرد)} \\ \sigma_y = +2a, \sigma_x = ? \\ \tau_{\theta} = +a \text{ (دوران المان در جهت ساعتگرد)} \end{cases}$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

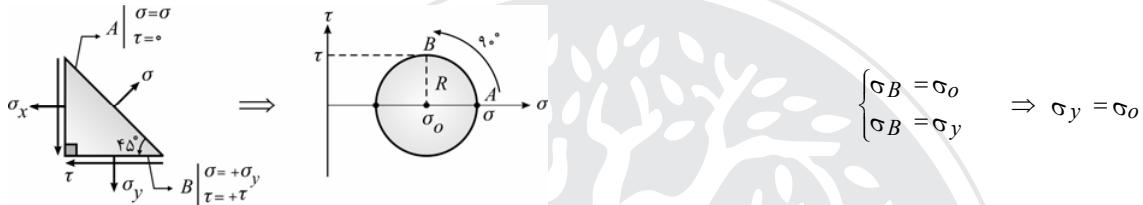
$$a = \frac{\sigma_x - 2a}{2} \sin 60^\circ + a \cos 60^\circ \Rightarrow \sigma_x = \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)a$$

المان تنش در نقطه‌ای از یک سازه، مطابق شکل مقابل است. نسبت  $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  در این المان را به دست آورده و رابطه

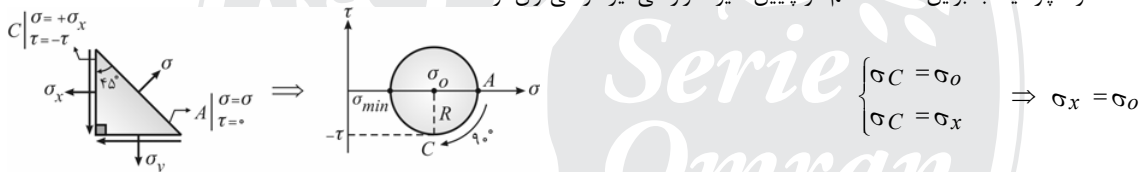
بین  $\sigma$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau$  را مشخص کنید.



هله؛ با توجه به صفر بودن تنش برشی بر روی صفحه مایل، این صفحه یک صفحه اصلی محسوب می‌شود که به سادگی می‌توان نشان داد صفحه اصلی ماکزیمم است (به علت این موضوع فکر کنید، این موضوع در انتهای سؤال بررسی شده است). برای رسیدن از صفحه مایل به صفحه افقی، در درون المان ۴۵ درجه و در جهت پادساعتگرد چرخیده و در دایره باید دو برابر آن یعنی ۹۰° و در جهت پادساعتگرد بچرخیم. بنابراین صفحه افقی (B) در بالای دایره قرار دارد و تنش نرمال در آن با مرکز دایره یکسان است، یعنی می‌توان نوشت:



از سوی دیگر برای رسیدن از صفحه مایل به صفحه قائم باید ۴۵ درجه و در جهت ساعتگرد چرخیده و در دایره باید دو برابر آن یعنی ۹۰ درجه و در جهت ساعتگرد چرخید. بنابراین صفحه قائم در پایین دایره قرار می‌گیرد و می‌توان نوشت:



با توجه به موارد اشاره شده،  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_o$  می‌باشد. از سوی دیگر، با توجه به این که اگر به اندازه  $R$  به بیفزاییم به  $\sigma_{max}$  می‌رسیم و با توجه به این که صفحات  $B$  و  $C$ ، صفحات تنش برشی ماکزیمم هستند می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma \\ \sigma_o = \sigma_x = \sigma_y \Rightarrow \sigma_{max} = \sigma_o + \tau_{max} \Rightarrow \sigma = \sigma_y + \tau \\ \tau_{max} = R = \tau \end{cases}$$

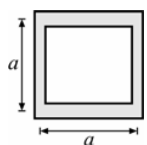
۵۳- (۳)

لنگر به نسبت  $EI$  پخش شده و با فرض هم جنس بودن حلقه و مربع داریم:

$$I = I_{\text{حلقه}} + I_{\text{لوزی}} = \pi R^3 t + \frac{(\sqrt{2}R)^4}{12} = \pi R^3 \times \frac{R}{9} + \frac{1}{3}R^4 \xrightarrow{\pi \approx 3} I = \frac{1}{3}R^4 + \frac{1}{48}R^4$$

$$M_{\text{حلقه}} = \frac{I_{\text{حلقه}}}{I} \times M = \frac{\frac{1}{3}R^4}{\frac{1}{3}R^4 + \frac{1}{48}R^4} \times M = \frac{1}{2}M$$

این تست مشابه با تست ۹۷ در صفحه ۱۴۱ از کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.



شکل داده شده، مقطع تیری است که جداره‌های افقی به ضخامت  $t_1$  و جداره‌های قائم با ضخامت  $t_2$  می‌باشند و  $t_1$  و  $t_2$  بسیار کم هستند. نسبت  $\frac{t_2}{t_1}$  چقدر باشد تا نصف لنگر خمشی در جداره‌های قائم و نصف آن در جداره‌های افقی قرار گیرد؟

۱ (۴)

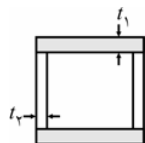
۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

## گزینه (۲)

با توجه به درس نامه لنگر خمشی وارد بر مقطع، به نسبت صلبیت خمشی بین قسمت‌های مختلف مقطع توزیع می‌شود. با توجه به ثابت بودن مدول یانگ ( $E$ ) داریم:



$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{2 \times \frac{t_2^3 a^3}{12}}{2 \times (t_1 a) \times \left(\frac{a}{3}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 3$$

## ۵۴- (۴)

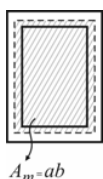
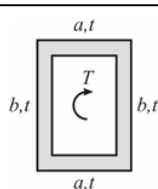
سهم جداره  $AB$  عبارت است از:

$$\tau_{AB} = \frac{T}{2A_m \times 2/5} \Rightarrow F_{AB} = \tau_{AB} \times A_{AB} = \frac{T}{2 \times (a \times 2a) \times 2/5} \times (2a \times 2/5 \Delta t)$$

$$AB \text{ از سطح مرکز فاصله } \bar{x} = \frac{2at \times \frac{a}{3} + 2at \times \frac{a}{3} + 2a \times 2t \times a}{2a \times 2/5 \Delta t + 2 \times 2at + 2a \times 2t} = \frac{4}{13} a$$

$$F_{AB} = \frac{T}{2a} \Rightarrow T_{AB} = F_{AB} \times AB = F_{AB} \times \frac{4}{13} a = \frac{4}{13} T \Rightarrow \text{تقریباً } 30\% \text{ درصد لنگر را } AB \text{ تحمل می‌کند.}$$

این تست مشابه با تمرین (۳-۱۵) در کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است. هر چند که مورد پرسیده شده در این تست، دارای ایراد علمی است.



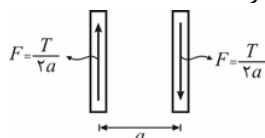
در مقطع مستطیل جدار نازک مقابل که تحت اثر لنگر پیچشی  $T$  قرار دارد:  
الف) نیروی برشی ایجاد شده در هر یک از وجه‌های قائم را به دست آورید.  
ب) چه سهمی از لنگر پیچشی در جداره‌های قائم مقطع تحمل می‌شود؟

هله:

الف) برای محاسبه نیروی تحمل شده در هر یک از جداره‌های قائم، کفایت جریان برش را در طول جداره قائم ضرب کنیم:

$$F_{\text{قائم}} = q \times b = \frac{T}{2A_m} \times b = \frac{T}{2(ab)} \times b = \frac{T}{2a}$$

ب) برای محاسبه سهم لنگر پیچشی تحمل شده توسط جداره‌های قائم مقطع، کفایت نیروی ایجاد شده در وجه‌های قائم را در بازوی آن ضرب کنیم:

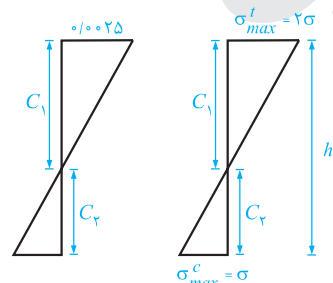


$$\Rightarrow T_{\text{قائم}} = F \times a = \frac{T}{2a} \times a = \frac{T}{2}$$

بنابراین نیمی از لنگر پیچشی در جداره‌های قائم و نیمی از آن در جداره‌های افقی تحمل می‌شود.

## ۵۵- (۲)

برای آنکه مقطع بهینه باشد باید  $\sigma_{max}^t = 2\sigma_{max}^c$  باشد و داریم:



$$c_1 = \frac{2}{3}h, c_2 = \frac{1}{3}h \text{ تشابه}$$

$$\varepsilon_{max}^t = \frac{y_{max}^t}{\rho} \Rightarrow 0.0025 = \frac{\left(\frac{2}{3}h\right)}{100} \Rightarrow h = \frac{300 \times 0.0025}{2} m = 0.375 m$$

$$h = 37.5 cm$$

این تست برگرفته از تست‌های ۱۰۶ در صفحه ۱۴۱۵ کتاب مقاومت مصالح سری عمران و ۲۹ در صفحه ۱۴۰۱ کتاب مقاومت مصالح سری عمران است.

در بالا و پایین مقطع یک تیر، مقادیر کرنش‌ها برابر  $0.002$  و  $0.003$  می‌باشد. اگر عمق مقطع برابر  $300$  میلی‌متر باشد، شعاع انحنای آن چقدر است؟

(۱)  $40$  متر (۲)  $50$  متر (۳)  $60$  متر (۴)  $75$  متر

(۳)

از رابطه  $\epsilon = -\frac{y}{\rho}$  استفاده می‌کنیم. در حالت کلی داریم:

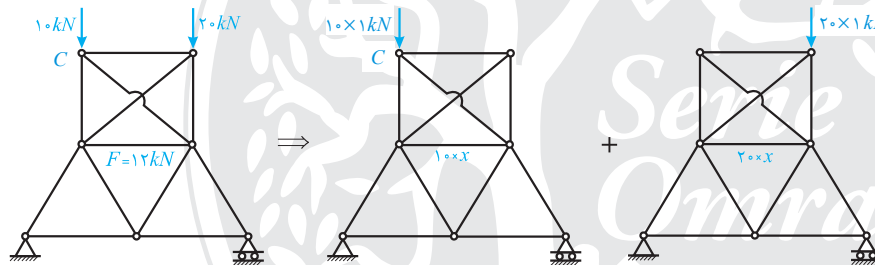
$$\text{عمق مقطع} = y_A - y_B = 300 \text{ mm} = 0.3 \text{ m}$$

$$\epsilon_B - \epsilon_A = -\frac{y_B - y_A}{\rho} = \frac{y_A - y_B}{\rho} \Rightarrow 0.003 - (-0.002) = 0.005 = \frac{0.3}{\rho} \Rightarrow \rho = 60 \text{ m}$$

**تذکر:** با توجه به این که کرنش‌ها مربوط به بالا و پایین مقطع هستند، با فرض این که به همراه لنگر خمشی، نیروی محوری بر مقطع اثر نکرده است، کرنش‌ها در بالا و پایین مقطع مختلف‌العلامت می‌باشند.

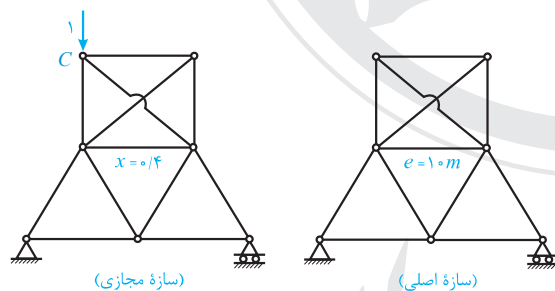
۵۶- (۲)

اگر تحت بار واحد  $F=1$  در  $C$  نیروی  $AB$  را  $x$  فرض کنیم، تحت نیروی  $F=1$  در  $D$  نیز نیروی آن برابر  $x$  بوده و داریم:



$$30x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{30} = 0.4 \Rightarrow \text{بنابراین تحت } F=1 \text{ در } C, \text{ نیروی } AB \text{ برابر } 0.4 \text{ است.}$$

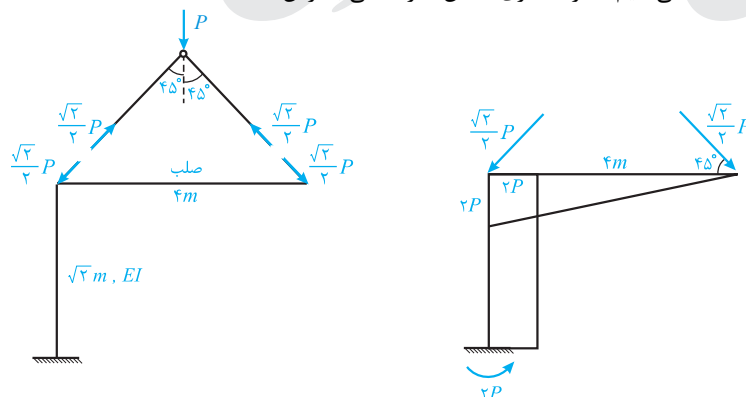
حال با روش کار مجازی داریم:



$$\begin{aligned} 1 \times \Delta y_c &= \bar{F} \times e \\ 1 \times \Delta y_c &= 0.4 \times 1 \\ \Delta y_c &= 0.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

۵۷- (۳)

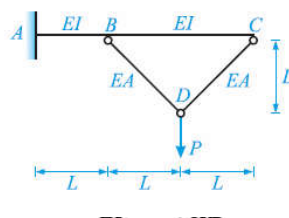
برای محاسبه تغییر مکان قائم  $(\Delta)$ ، از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم (سازه مجازی، همان سازه اصلی با فرض  $P=1$  است):



$$\Delta y_A = \sum \int \frac{MM}{EI} dx + \sum \frac{F\bar{F}L}{AE}$$

$$\Delta y_A = \frac{2P \times 2 \times \sqrt{2}}{EI} + 2 \times \frac{(-\frac{\sqrt{2}}{2}P)(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times 2\sqrt{2}}{AE} = \frac{4\sqrt{2}P}{EI} + 2\sqrt{2} \frac{P}{AE}$$

این تست مشابه تست ۲۹ در صفحه ۲۲ از جلد اول کتاب تحلیل سازه‌های سری عمران بوده است.



تغییر مکان قائم نقطه D در سازه مقابل کدام است؟  $(AE = \frac{EI}{\sqrt{2}L})$

(۲)  $\frac{\Delta PL^2}{EI}$

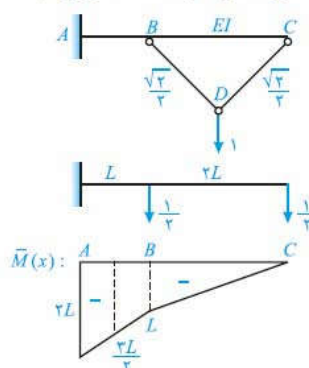
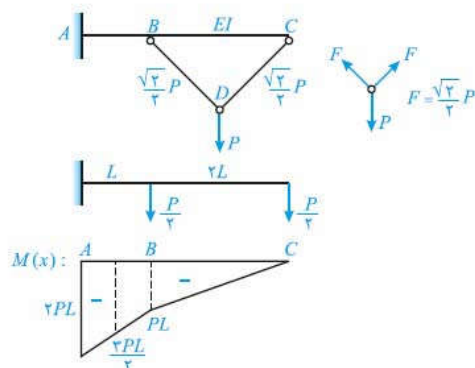
(۴)  $\frac{2PL^2}{EI}$

(۱)  $\frac{4PL^2}{EI}$

(۳)  $\frac{3PL^2}{EI}$

(۲) - ۲۹

با وارد کردن یک بار واحد قائم در نقطه D در تیر ABC با توجه به معرفی EI، دیاگرام لنگر را رسم می‌کنیم و در اعضای BD و CD با توجه به معرفی AE، نیروی داخلی محوری را به دست می‌آوریم.



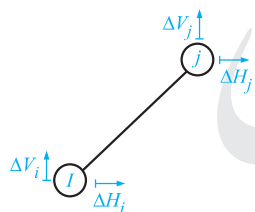
$$\Delta_D = \int \frac{MM}{EI} dx + \sum \frac{NNL}{AE}$$

$$\Delta_D = \left[ \frac{1}{EI} \times \frac{L}{6} \times \left( \frac{2}{3}PL \times \frac{2}{3}L + 4 \times \frac{2}{3}PL \times \frac{1}{3}L + PL \times L \right) + \frac{1}{EI} \left( \frac{PL \times L \times \frac{2}{3}L}{3} \right) \right] + 2 \times \left[ -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}P \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}L}{AE} \right]$$

$$\Delta_D = \frac{2PL^2}{EI} + \frac{\sqrt{2}PL}{AE} = \frac{2PL^2}{EI} + \frac{\sqrt{2}PL}{\frac{EI}{\sqrt{2}L}} = \frac{\Delta PL^2}{EI}$$

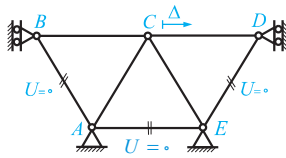
(۱) - ۵۸

نکته: انرژی کرنشی خرابا در شکل مقابل با توجه به تغییر مکان‌های نشان داده شده برابر است با:



$$U_{ij} = \frac{AE}{L} [(\Delta H_j - \Delta H_i) \cos \theta + (\Delta V_j - \Delta V_i) \sin \theta]^2 \quad (\theta \text{ زاویه با افق است})$$

اگر مفصل C به اندازه  $\Delta$  افقی و به سمت راست حرکت کند داریم:



$$U_{BC} = \frac{AE}{\sqrt{L}} [(\Delta - 0) \cos 0 + (\Delta V_j - \Delta V_i) \sin 0]^2 = \frac{AE}{\sqrt{L}} \times \Delta^2$$

$$U_{CD} = \frac{AE}{\sqrt{L}} \Delta^2$$

$$U_{CA} = \frac{AE}{\sqrt{L}} [(\Delta - 0) \cos 60 + (0 - 0) \sin 60]^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{AE}{L} \Delta^2$$

$$U_{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{AE}{L} \Delta^2$$

$$U = 2 \times \left( \frac{AE}{\sqrt{L}} \Delta^2 \right) + 2 \times \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{AE}{L} \Delta^2 \right) = \frac{5}{3} \frac{AE}{L} \Delta^2$$

این تست مشابه تمرین (۱-۱) در صفحه ۳۲۰ جلد دوم کتاب تحلیل سازه سری عمران بوده است.

**تمرین ۱-۱:** در اثر نوعی بارگذاری از جنس نیرو بر روی گره‌های خربای مقابل، گره B به اندازه  $\delta$  به سمت راست و  $2\delta$  به سمت پایین جابه‌جا شده است و گره C نیز به مقدار  $3\delta$  به سمت چپ جابه‌جا شده است. انرژی کرنشی ذخیره شده در اعضای AB و BC را به دست آورید. (صلبیت محوری عضو  $AE$ ، و بقیه اعضا  $AE$  فرض شود).

**حل:** برای محاسبه انرژی کرنشی اعضای AB و BC، با توجه به تغییر مکان گره‌های عضو که در صورت سؤال داده شده است، انرژی کرنشی در هر یک از اعضا خربا را محاسبه می‌کنیم (به شکل‌های رسم شده دقت کنید):

گره A ثابت است)  $\Delta H_A = \Delta V_A = 0$  ،  $\Delta H_B = \delta$  ،  $\Delta V_B = -2\delta$  ،  $\Delta H_C = \Delta V_C = 0$  ،  $\Delta H_B = \delta$  ،  $\Delta V_B = -2\delta$

$AB : \theta = 90^\circ$  ،  $\Delta H_B = \delta$  ،  $\Delta V_B = -2\delta$  ،  $\Delta H_A = \Delta V_A = 0$

$$U_{AB} = \frac{AE}{\sqrt{L}} [(\delta - 0) \cos 90 + (-2\delta - 0) \sin 90]^2 = \frac{2AE\delta^2}{L}$$

$BC : \theta = 135^\circ$  ،  $\Delta H_C = -3\delta$  ،  $\Delta V_C = 0$  ،  $\Delta H_B = \delta$  ،  $\Delta V_B = -2\delta$

$$U_{BC} = \frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{2}L} [(-3\delta - \delta) \cos 135 + (0 + 2\delta) \sin 135]^2 = \frac{9AE\delta^2}{L}$$

۵۹- (۳)

کافیست دوران سمت چپ و راست B را (با فرض مثبت بودن دوران ساعتگرد) برابر قرار دهیم:

$\theta = 0.005 \text{ rad}$

$(\theta_L)_B = (\theta_R)_B \Rightarrow 0.005 - \frac{M \times L}{EI} = \frac{M \times 2L}{EI} \Rightarrow M = \frac{EI \times 0.005}{3L} = \frac{12000 \times 0.005}{3 \times 1} = 2 \text{ ton.m}$

BC تعادل  $\Rightarrow M_C = M = 2 \text{ ton.m}$

این تست مشابه با تمرین‌های (۹-۱۲) و (۹-۲۰) صفحه ۱۰۳ از جلد دوم کتاب تحلیل سازه سری عمران بوده است.

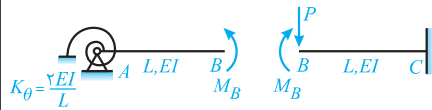
در سازه مقابل، مطلوبست:

الف) لنگر ایجاد شده در فنر.

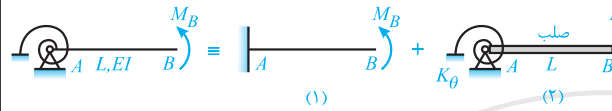
ب) انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه.

● حل:

الف) سازه از اتصال دو جسم به تنهایی پایدار (AB و BC) توسط یک مفصل برشی تشکیل شده و لذا سازه آزاد شده و معادله سازگاری مناسب برای آن به صورت زیر می‌باشد:

$$K_{\theta} = \frac{\sqrt{EI}}{L} \quad \theta_B^L = \theta_B^R$$


برای محاسبه  $\theta_B^L$  در قطعه AB مانند فصل (۹)، آن را به صورت مجموع دو سازه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\theta_{B_1} = -\frac{M_B L}{EI} \quad \theta_{B_2} = \theta_{\text{فصل}} = -\frac{M_{\text{فصل}}}{K_{\theta}} = -\frac{M_B}{\frac{\sqrt{EI}}{L}}$$


$$\theta_B^L = -\frac{M_B L}{EI} - \frac{M_B}{\frac{\sqrt{EI}}{L}}, \quad \theta_{B_R} = \frac{M_B L}{EI} - \frac{PL^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}}$$

$$\text{جایگذاری در رابطه سازگاری} \rightarrow -\frac{M_B L}{EI} - \frac{M_B}{\frac{\sqrt{EI}}{L}} = \frac{PL^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}} + \frac{M_B L}{EI} \Rightarrow M_B = \frac{PL}{5} \Rightarrow M_{\text{فصل}} = \frac{PL}{5}$$

دقت شود که با توجه به جهت مثبت نشان داده شده،  $\theta$  در جهت ساعتگرد مثبت و در جهت پادساعتگرد منفی در نظر گرفته شده است.

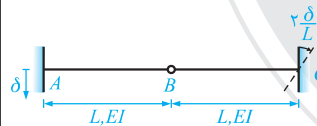
ب) با توجه به این که تنها یک نیروی متمرکز بر سازه اثر کرده است، انرژی کرنشی در سازه به صورت زیر ساده‌تر محاسبه می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} P \times \Delta_B^R = \frac{1}{2} \times P \times \Delta_B^R$$

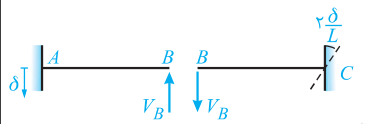
بنابراین برای حل قسمت ب، کافی است جابه‌جایی سمت راست مفصل برشی را به دست آوریم:

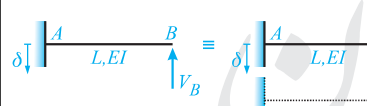
$$\Delta_B^R = \frac{PL^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}} - \frac{M_B L^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}} = \frac{PL^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}} - \frac{PL^{\sqrt{3}}}{5\sqrt{EI}} = \frac{4PL^{\sqrt{3}}}{5\sqrt{EI}} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times P \times \frac{4PL^{\sqrt{3}}}{5\sqrt{EI}} = \frac{2P^2 L^{\sqrt{3}}}{5\sqrt{EI}}$$

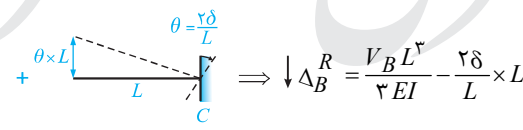
در اثر نشست تکیه‌گاه‌های A و C مطابق شکل، جابه‌جایی مفصل B چقدر است؟



● حل: با اندکی دقت ملاحظه می‌شود که سازه نامعین نشان داده شده از اتصال دو قطعه کنسولی، توسط یک مفصل خمشی تشکیل شده و یک درجه نامعین است. برای حل ابتدا سازه آزاد شده و معادله سازگاری را برای آن به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Delta_B^L = \Delta_B^R$$


$$\Delta_B^L = \delta - \frac{V_B L^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}}$$


$$\Delta_B^R = \frac{V_B L^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}} - \frac{2\delta}{L} \times L$$


در ادامه با جایگذاری مقادیر  $\Delta_B^R$  و  $\Delta_B^L$  در رابطه سازگاری داریم:

$$\Delta_B^L = \Delta_B^R \Rightarrow \delta - \frac{V_B L^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}} = \frac{V_B L^{\sqrt{3}}}{\sqrt{EI}} - \frac{2\delta}{L} \times L \Rightarrow V_B = \frac{9EI\delta}{2L^{\sqrt{3}}}$$

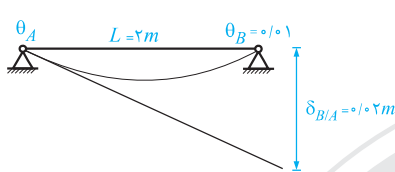
در ادامه برای محاسبه  $\Delta_B$  در تیر با کمک گرفتن از قطعه سمت چپ و یا سمت راست می توان نوشت:

نقطه  $B$  به سمت بالا جابه جا می شود.

$$\Delta_B = \delta - \frac{V_B L^3}{3EI} = \delta - \frac{\frac{9EI\delta}{2L^3} \times L^3}{3EI} = \frac{\delta}{2}$$

۶۰- (۲)

روش اول: دوران نقطه  $A$  برابر است با:



$$|\theta_A| = \frac{\delta_{B/A}}{L} = \frac{0.02}{2} = 0.01$$

سطح قضیه اول لنگر سطح

$$\theta_B - \theta_A = \int \frac{M}{EI} dx \Rightarrow 0.02 = \frac{\int M dx}{EI}$$

$$\Rightarrow \int M dx = 0.02 EI \Rightarrow \int M dx = 0.02 \times 1 \times 2^3 = 20 \text{ ton.m}^2$$

دقت شود که  $\theta_A$  و  $\theta_B$  علامتشان قرینه هم است و تفاضلشان صفر نمی شود.

روش دوم:

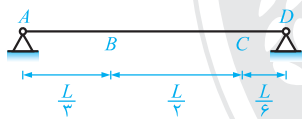
$$\delta_{A/B} = \theta_B \times L = 0.01 \times 2 = 0.02 \text{ m}$$

$$\delta_{A/B} + \delta_{B/A} = \int \frac{M}{EI} dx \times L \Rightarrow 0.02 + 0.02 = \frac{\int M dx}{EI} \times 2 \Rightarrow \int M dx = 0.02 EI = 20 \text{ ton.m}^2$$

این تست مشابه با تمرین (۸-۹) در صفحه ۲۹۱ از جلد اول کتاب تحلیل سازه سری عمران بوده است.

$$\frac{PL^3}{3EI} \text{ و } \frac{PL^3}{6EI}$$

تمرین ۸-۹: در اثر یک بارگذاری روی تیر زیر، مقادیر  $t_{B/C}$  و  $t_{C/B}$  به ترتیب برابر با  $\frac{PL^3}{3EI}$  و  $\frac{PL^3}{6EI}$  شده است. اختلاف شیب بین نقاط  $B$  و  $C$  کدام است؟



$$\frac{\Delta PL^2}{3EI} \quad (۲)$$

$$\frac{PL^3}{3EI} \quad (۴)$$

$$\frac{\Delta PL^2}{6EI} \quad (۱)$$

$$\frac{\Delta PL^2}{12EI} \quad (۳)$$

حل: با استفاده از نکات اشاره شده داریم:

$$t_{B/C} + t_{C/B} = A_m \times L_{BC} \Rightarrow \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{6EI} = A_m \times \frac{L}{3} \Rightarrow A_m = \frac{\Delta PL^2}{3EI}$$

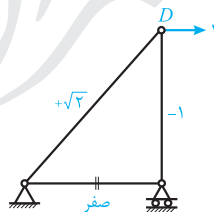
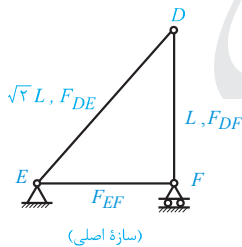
$A_m$  سطح زیر دیاگرام  $\frac{M}{EI}$  بین نقاط  $B$  و  $C$  بوده و معادل اختلاف شیب بین نقاط  $B$  و  $C$  می باشد.

$$\theta_{B/C} = \theta_B - \theta_C = A_m = \frac{\Delta PL^2}{3EI}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۶۱- (۴)

برای محاسبه تغییر مکان افقی  $D$ ، قسمت معین و پایدار  $DEF$  را با نیروهای فرض شده از خرابا جدا می کنیم:



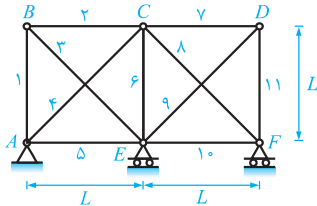
$$1 \times \Delta_{D_x} = \sum \frac{F \bar{F} L}{AE}$$

$$1 \times \Delta_{D_x} = \frac{F_{DE} \times (+\sqrt{2}) \times \sqrt{2} L}{AE} + \frac{F_{DF} \times (-1) \times L}{AE}$$

$$\Delta_{D_x} = 0 \Rightarrow 2 F_{DE} - F_{DF} = 0 \Rightarrow \frac{F_{DF}}{F_{DE}} = 2$$

این تست مشابه تست ۱۰ در صفحه ۳۶۶ از جلد دوم کتاب تحلیل سازه سری عمران بوده است.

عضو شماره  $i$  خرپای مطابق شکل تحت اثر بارگذاری خارجی، دارای نیروی محوری  $N_i$  است. تغییر مکان افقی نقطه  $C$  چقدر است؟ (شماره اعضا روی شکل نمایش داده شده است). تمام اعضاء یکسان است.



$$(1) \quad (N_D + N_V - 2N_9 - N_{11}) \frac{L}{EA}$$

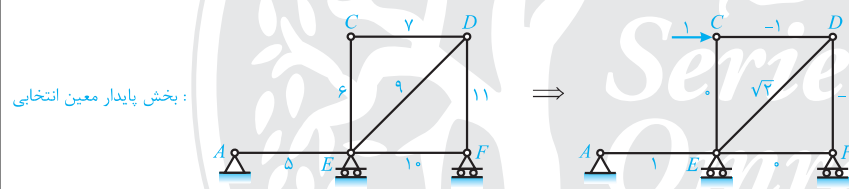
$$(2) \quad (N_D + N_V + 2N_9 - N_{11}) \frac{L}{EA}$$

$$(3) \quad (N_D - N_V - 2N_9 + N_{11}) \frac{L}{EA}$$

$$(4) \quad (N_D - N_V + 2N_9 - N_{11}) \frac{L}{EA}$$

گزینه (۴)

خرپا نامعین بوده و تحت اثر بارگذاری روی آن نیروی اعضاء خرپا مشخص می‌باشد. برای محاسبه تغییر مکان نقطه‌ای دلخواه از خرپا کافی است بخشی پایدار و معین را از خرپا جدا نموده و با استفاده از روش کار مجازی، جابه‌جایی نقطه موردنظر را محاسبه کنیم. دقت شود برای انتخاب بخشی پایدار و معین از خرپا حتماً باید به گزینه‌های سؤال توجه کرد چرا که به شکل‌های متفاوتی می‌توان بخشی معین و پایدار را از خرپا جدا کرد. بنابراین بخشی پایدار و معین از خرپا را طوری انتخاب می‌کنیم که اعضای ۵، ۷، ۹ و ۱۱ در آن موجود باشند.

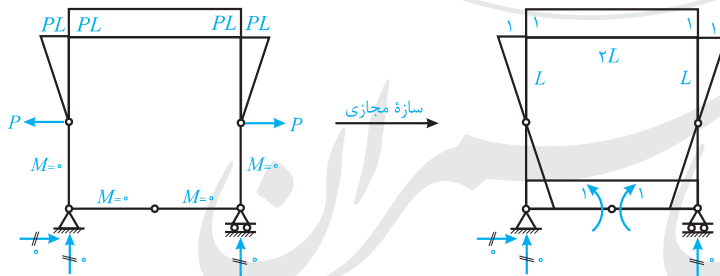


$$\Delta C_x = \sum \frac{F \bar{f} L}{AE} = \frac{N_D \times 1 \times L}{AE} + \frac{N_V \times (-1) \times L}{AE} + \frac{N_9 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} L}{AE} + \frac{N_{11} \times (-1) \times L}{AE}$$

$$\Delta C_x = \frac{L}{AE} (N_D - N_V + 2N_9 - N_{11})$$

۶۲- (۱)

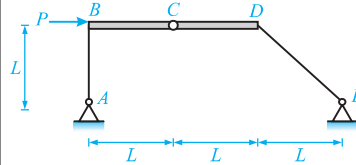
برای محاسبه اختلاف شیب در سمت چپ و راست مفصل  $G$ ، از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم:



$$1 \times \Delta \theta_{L,R} = \frac{1 \times PL \times 2L}{EI} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{PL \times 1 \times L}{EI} \Rightarrow \Delta \theta_{L,R} = \frac{5}{3} \frac{PL^2}{EI}$$

این تست مشابه تمرین (۶-۹) در صفحه ۲۰۷ جلد اول کتاب تحلیل سازه سری عمران است.

● **تمرین ۶-۹:** در قاب مقابل، اختلاف دوران در محل مفصل خمشی  $C$  کدام است؟ (اعضاء  $BC$  و  $CD$  صلب و سایر اعضا دارای صلبیت خمشی  $EI$  می باشند)



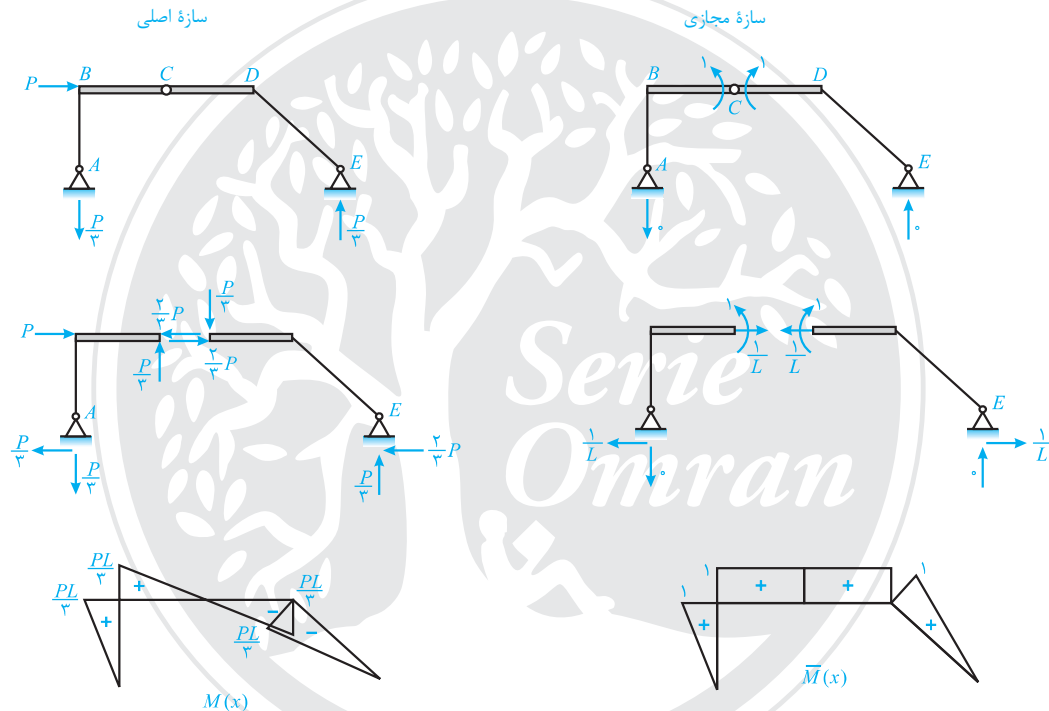
$$(۲) \quad \left(\frac{\sqrt{2}+1}{9}\right) \frac{PL^2}{EI}$$

$$(۴) \quad \frac{PL^2}{3EI}$$

$$(۱) \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{PL^2}{EI}$$

$$(۳) \quad \left(\frac{\sqrt{2}-1}{9}\right) \frac{PL^2}{EI}$$

● **حل:** با اعمال دو لنگر واحد و مختلف‌الجهت در طرفین مفصل خمشی  $C$  مطابق شکل زیر، اختلاف دوران در طرفین مفصل  $C$  را محاسبه می‌کنیم. دقت شود که برای رسم دیاگرام، دو قطعه را باید از نقطه  $C$  باز کرد:



$$\Delta\theta_C = \int_A^B \frac{MM}{EI} dx + \int_D^E \frac{MM}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL}{3} \times 1 \times L \right] + \frac{1}{EI} \left[ -\frac{PL}{3} \times 1 \times \sqrt{2}L \right]$$

$$\Delta\theta_C = \frac{PL^2}{9EI} - \frac{\sqrt{2}PL^2}{9EI} = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{9}\right) \times \frac{PL^2}{EI}$$

قدرمطلق  $\Delta\theta_C$  برابر  $\frac{\sqrt{2}-1}{9} \frac{PL^2}{EI}$  بوده و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۶۳- (۱)

سؤال زیرکانه‌ای است، تغییر مکان قائم  $D$  به فرم کلی زیر است:

$$\Delta y_D = \alpha \frac{PR^2}{EI} + \beta \frac{FL}{AE}$$

$\alpha$  برابر ۸  
 $\beta$  برابر ۱/۴

ترم اول هشت برابر می‌شود.  $R_2 = 2R_1 \Rightarrow$  شعاع دایره ۱۰۰ درصد افزایش

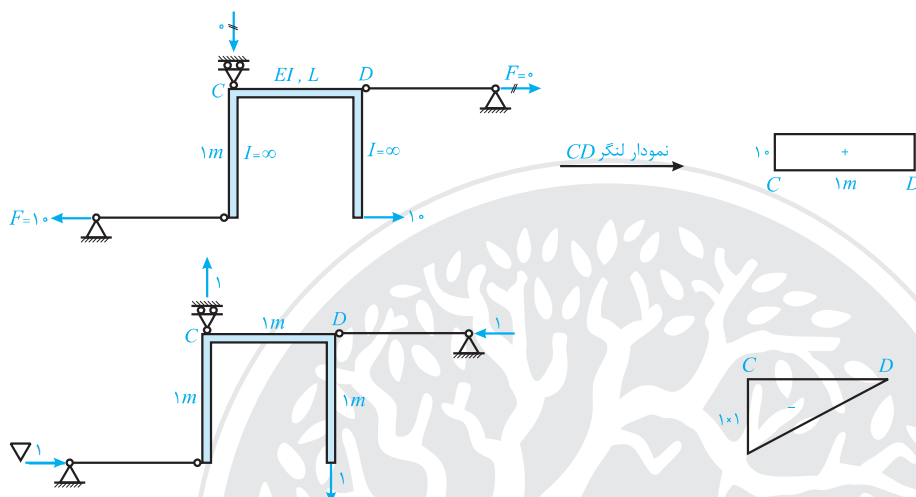
طول  $L$  باید ۲ برابر شود.  $A_2 = \frac{1}{4}A_1 \Rightarrow$  ابعاد مربع ۵۰ درصد کاهش

دقت شود که اگر ابعاد قطعه خمشی به‌طور متناسب تغییر کند، ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  تغییر نمی‌کند و نیروهای  $P$  و  $F$  نیز ثابت است.

**تذکره:** برخی از دانشجویان با بی دقتی تمام تصور می کنند که مساحت مقطع مربع  $50\%$  کاهش یافته است ( $\frac{1}{4}$  برابر شده است) و به اشتباه می گویند که طول چهار برابر می شود.

۶۴- (۳)

از روش کار مجازی استفاده می کنیم:



$$1 \times \Delta y_F = \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx + \sum \frac{F \bar{F} L}{AE} \Rightarrow \Delta y_F = -\frac{1}{2} \times \frac{10 \times 1 \times 1}{EI} - \frac{10 \times (-1) \times 1}{AE} = -\frac{5}{EI} + \frac{10}{AE} \Rightarrow |\Delta y_F| = \frac{5}{EI} + \frac{10}{AE}$$

این تست مشابه تست ۵۳ در صفحه ۲۲۵ از جلد اول کتاب تحلیل سازه سری عمران بوده است.

جابه جایی قائم گره E در قاب زیر کدام است؟ ( $AE = \frac{6EI}{L^2}$ )

(۱)  $\frac{PL^3}{6EI}$

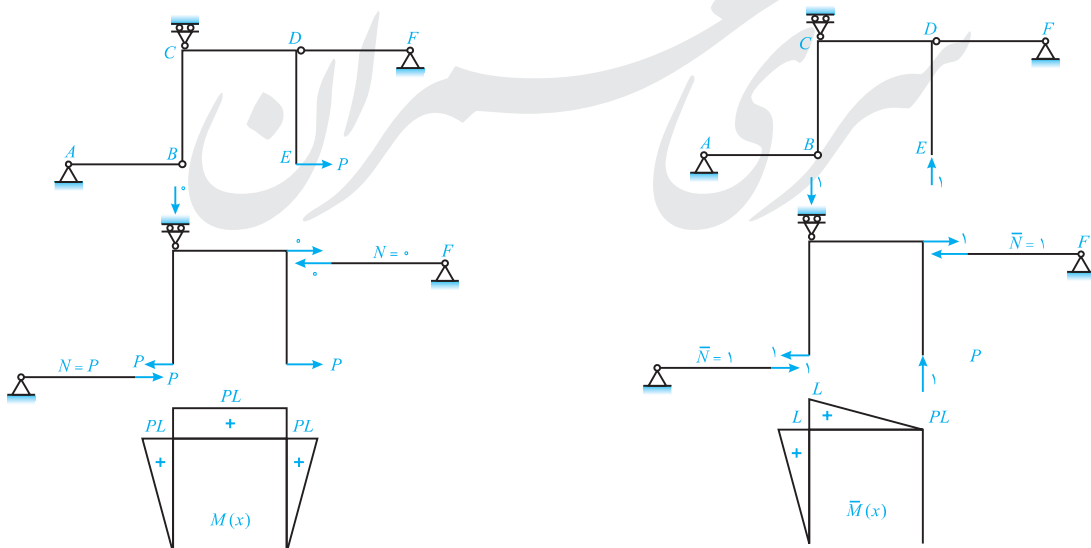
(۲)  $\frac{5PL^3}{6EI}$

(۳)  $\frac{PL^3}{EI}$

(۴)  $\frac{2PL^3}{3EI}$

گزینه (۳)

با توجه به معرفی AE در اعضای دو سر مفصل AB و DF، در این اعضا تنها اثر تغییر شکل های محوری و در اعضا BC، DE و با توجه به معرفی EI، تغییر شکل های خمشی مدنظر است. در ادامه با وارد کردن یک بار واحد قائم در E داریم:

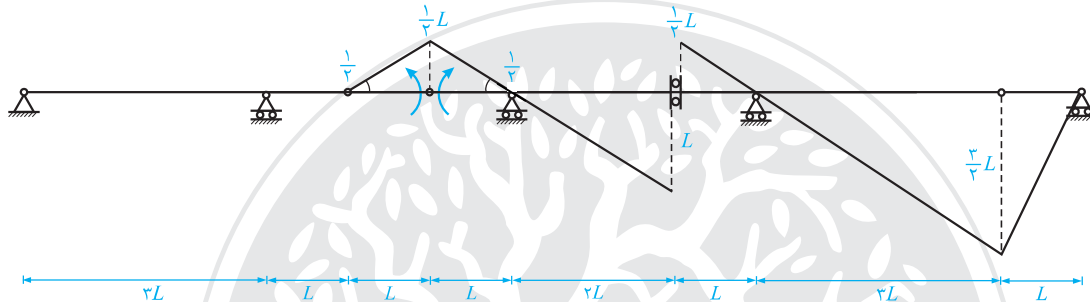


$$\int_B^C \frac{MM}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{PL \times L \times L}{3} \right) = \frac{PL^3}{3EI}, \quad \int_C^D \frac{MM}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( -\frac{PL \times L \times L}{3} \right) = -\frac{PL^3}{3EI}, \quad \int_D^E \frac{MM}{EI} dx = 0$$

$$\Delta E_y = \int \frac{MM}{EI} dx + \sum \frac{NNL}{AE} = \left( \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{3EI} \right) + \frac{P \times 1 \times L}{AE} = \frac{\Delta PL^3}{6EI} + \frac{PL}{6EI} = \frac{PL^3}{EI}$$

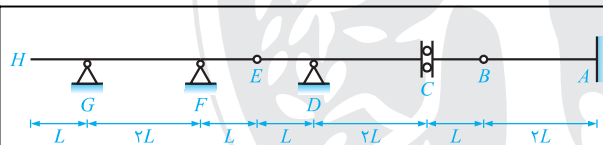
۶۵- (۳)

خط تأثیر لنگر  $I$  به صورت زیر است:



بنابراین ارتفاع خط تأثیر لنگر  $I$  در  $G$  برابر  $-\frac{3}{4}L$  است.

این تست مشابه تست ۴ در صفحه ۲۸۷ از جلد دوم کتاب تحلیل سازه سری عمران بوده است.



خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه‌ای به فاصله  $\frac{L}{4}$  از تکیه‌گاه گیردار را در نظر بگیرید. ارتفاع این خط تأثیر در نقاط  $B$ ، سمت راست  $C$  و  $E$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۲)  $3L$ ،  $\frac{3}{4}L$ ، صفر

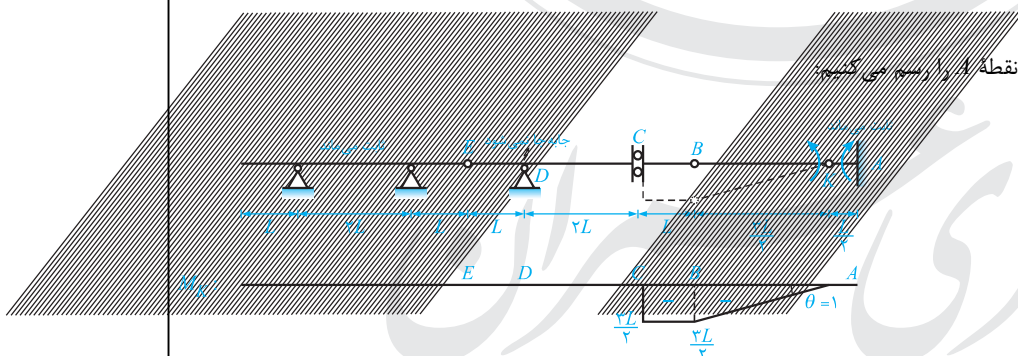
(۴) صفر،  $3L$

(۱)  $\frac{3}{4}L$ ،  $\frac{3}{4}L$ ، صفر

(۳)  $L$ ،  $\frac{L}{4}$ ،  $\frac{L}{4}$

گزینه (۱)

ابتدا خط تأثیر لنگر خمشی در فاصله  $\frac{L}{4}$  از نقطه  $A$  را رسم می‌کنیم:



همان گونه که ملاحظه می‌شود، ارتفاع خط تأثیر مربوطه در نقاط  $B$ ، سمت راست  $C$  و  $E$  به ترتیب  $\frac{3}{4}L$ ،  $\frac{3}{4}L$  و صفر می‌باشد.



سری عمران

## مکانیک خاک و مهندسی پی

### کارشناسی ارشد

آزمون امسال (۹۳) در درس مکانیک خاک و پی سازی، همانند آزمون سال گذشته (۹۲) نسبتاً ساده بوده است. علت اصلی این سادگی را می توان در دو موضوع دانست: اول اینکه حدود ۵۰ درصد سؤالات این آزمون با آزمون های سراسری سال های قبل مشابهت داشته است و دوم اینکه حجم محاسبات درس پی سازی نسبت به سال های قبل، به شدت کاهش یافته بود. البته در این آزمون سؤالات جدید هم مطرح شده بود که با کمی فکر می توانستید آنها را حل کنید.

#### و اما در مورد کتاب های مکانیک خاک و پی سری عمران:

همانطور که گفتیم اکثر سؤالات مکانیک خاک، تکرار تست های کنکورهای سال های گذشته بوده است و سؤالات جدید نیز با مفاهیم درسی کتاب به سادگی قابل حل بوده است. در مورد کتاب پی سازی اگر به گراف نگفته باشیم اکثر سؤالات عیناً یا با مشابهت بسیار زیاد در کتاب بوده است. توجه شما را به سؤالات مشابه که عیناً از کتاب خاک و پی سری عمران استخراج شده است جلب می کنیم.

#### گروه پاسخ دهندهگان:

ساسان امیرافشاری، حسین فراهانی، مهدی اژدرنژاد

مکانیک خاک و مهندسی پی

۶۶- (۱)

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال در مورد الک‌ها و نیز مقادیر لای و رس، می‌توان ذرات تشکیل‌دهنده خاک‌های A و B را به صورت زیر مشخص کرد:

خاک A شامل: ۳۰ درصد شن، ۵۰ درصد ماسه، ۵ درصد لای و ۱۵ درصد رس  
خاک B شامل: ۳۰ درصد شن، ۵۰ درصد ماسه، ۱۵ درصد لای، ۵ درصد رس

از آنجائیکه که درصد درشت دانه (۸۰٪) و ریزدانه (۲۰٪) در هر دو خاک یکسان بوده ولی درصد رس در خاک A بیشتر از خاک B است، می‌توان نتیجه گرفت که خاک A خمیری‌تر و ریزدانه‌تر است، یعنی نفوذپذیری (K) آن کمتر از خاک B و حد روانی (LL) آن بیش‌تر از خاک B می‌باشد. پس گزینه‌ی (۱) درست است.

**تذکر:** هر چه خاک خمیری‌تر باشد، حد روانی (LL) آن بالاتر و حد خمیری‌اش (PL) کمتر است، پس در مقایسه حد خمیری این دو خاک نیز می‌توان گفت که حد خمیری (PL) خاک A کمتر از خاک B است.

۶۷- (۴)

$$U_1 = U_2 \Rightarrow T_{v1} = T_{v2} \Rightarrow \frac{C_{v1} t_1}{H_{dr1}^2} = \frac{C_{v2} t_2}{H_{dr2}^2}$$

$$\xrightarrow[\text{جنس خاک‌ها یکی است}]{C_{v1} = C_{v2}} \frac{t_2}{t_1} = \left( \frac{H_{dr2}}{H_{dr1}} \right)^2 \Rightarrow \frac{t_2}{5} = \left( \frac{2}{0.4 \times \frac{1}{2}} \right)^2 \Rightarrow t_2 = 50000 \text{ دقیقه} = 35 \text{ روز}$$

در آزمایش تحکیم به علت وجود سنگ متخلخل در بالا و پایین نمونه، زهکشی دو طرفه است.

کتاب خاک - تست (۹۷) صفحه (۳۱۲) که مربوط به کنکور سراسری ۷۹ است.

در یک آزمایش تحکیم روی نمونه رسی به ضخامت ۴ سانتی‌متر در مدت زمان ۶ دقیقه ۷۰٪ نشست نهایی ثبت شده است. اگر لایه‌ای از این خاک به ضخامت ۲ متر روی لایه‌ای سنگی قرار داشته باشد، طی تقریباً چند روز همان درصد نشست انجام خواهد شد؟

گزینه (۳)

$$\frac{t_2}{t_1} = \left( \frac{H_{dr2}}{H_{dr1}} \right)^2 \Rightarrow \frac{t_2}{6} = \left( \frac{200}{4 \times \frac{1}{2}} \right)^2 \Rightarrow t_2 = 60000 \text{ min} = 41.67 \text{ day} \approx 42 \text{ day}$$

**توجه:** نمونه رسی در آزمایش تحکیم از دوطرف زهکشی می‌شود و حداکثر مسافت زهکشی آن، نصف ضخامت نمونه است. در این سؤال همانطور که ملاحظه شد، نوشتیم:

$$H_{dr1} = H_0 \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ cm}$$

۶۸- (۲)

در یک آزمایش سه محوری (CD، CU یا UU) مقدار تنش انحرافی  $\Delta \sigma_d$  از تفاضل  $\sigma_1$  و  $\sigma_3$  به دست می‌آید، پس در این سؤال داریم:

$$\Delta \sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 = 0.35 - 0.1 = 0.25 \text{ MPa}$$

حال با تکرار این آزمایش با یک  $\sigma_3$  دیگر (بر روی نمونه‌ی دیگر از همان خاک) چون آزمایش UU است،  $\Delta \sigma_d$  ثابت بوده و خواهیم داشت:

$$\Delta \sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 \Rightarrow 0.25 = 0.15 - \sigma_3 \Rightarrow \sigma_3 = 0.25 \text{ MPa}$$

همچنین می‌دانیم در آزمایش UU بر روی رس اشباع زاویه اصطکاک داخلی برابر صفر خواهد بود ( $\phi = 0$  است)، بنابراین زاویه صفحه‌ی شکست

$$\theta = 45 + \frac{\phi}{2} = 45 + 0 = 45^\circ$$

با امتداد افقی برابر است با:

پس گزینه (۲) جواب درست است.

## تست ۹۱ - صفحه (۱۴۰۴) و توضیحات آزمایش سه محوری UU در صفحه (۳۷۱)

در یک آزمایش سه محوری UU بر روی یک نمونه خاک اشباع در صورتیکه تنش همه جانبه  $0.1 \text{ MPa}$  باشد، تنش کل قائم در هنگام گسیختگی نمونه  $0.35 \text{ MPa}$  خوانده شده است. اگر بر روی همین خاک آزمایش UU با تنش همه جانبه  $0.2 \text{ MPa}$  انجام شود، تنش انحرافی لازم برای گسیخته شدن نمونه چقدر خواهد بود؟

- (۱)  $0.25 \text{ MPa}$  (۲)  $0.35 \text{ MPa}$  (۳)  $0.55 \text{ MPa}$  (۴)  $0.65 \text{ MPa}$

گزینه (۱)

مطابق با متن درس و آنچه در شکل (۶-۲۰) نشان داده شده است، در آزمایش UU در شرایط اشباع، به ازای تنش‌های همه جانبه متفاوت، نمونه با تنش انحرافی یکسانی گسیخته می‌شود. بنابراین در این سؤال خواهیم داشت:

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 = 0.35 - 0.1 = 0.25 \text{ MPa}$$

## ۶۹- (۳)

در آزمایش سه محوری CU می‌توان رابطه گسیختگی تنش‌های اصلی را در دو حالت، یکی با حاکمیت تنش کل و دیگری با حاکمیت تنش موثر نوشت. در این سؤال با توجه به اطلاعات داده شده، تنش مؤثر حاکم بوده و می‌نویسیم:

$$(\sigma_1 - U) = (\sigma_3 - U) \tan^2\left(45 + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45 + \frac{\phi'}{2}\right) \Rightarrow (125 - 32) = (\sigma_3 - 32) \tan^2\left(45 + \frac{30}{2}\right) + 2 \times 18 \times \tan\left(45 + \frac{30}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 93 = (\sigma_3 - 32) \times 3 + 16 \times \sqrt{3} \Rightarrow \sigma_3 = 54 \text{ KPa}$$

کتاب خاک - مشابه تست (۲۱) صفحه (۳۹۱)

نمونه خاک رسی با  $c' = 0$  و  $\phi' = 30^\circ$  مفروض است. آزمایش سه محوری زهکشی نشده (CU) با فشار محفظه‌ای  $\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$  انجام شده است. اگر تفاوت تنش‌ها در لحظه گسیختگی برابر فشار محفظه‌ای باشد، فشار آب حفره‌ای در این لحظه چند  $\text{kN/m}^2$  است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۲۰۰ (۴) صفر

گزینه (۲)

می‌خواهیم پارامترهای مقاومت برشی در حالت مؤثر (مربوط به آزمایش CD) را برای آزمایش CU به کار ببریم. بنابراین با استفاده از رابطه (۶-۱۶) خواهیم داشت:

$$(\sigma_1 - \Delta u_d) = (\sigma_3 - \Delta u_d) \tan^2\left(45 + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45 + \frac{\phi'}{2}\right)$$

$$, \Delta\sigma_d = \sigma_3 = 300 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_3 + \Delta\sigma_d = 300 + 300 = 600 \text{ kN/m}^2$$

$$(600 - \Delta u_d) = (300 - \Delta u_d) \tan^2\left(45 + \frac{30}{2}\right) + 0 \Rightarrow \Delta u_d = 150 \text{ kN/m}^2$$

## ۷۰- (۲)

شرط جوشش آن است که  $i = i_{cr}$  شود، بنابراین می‌نویسیم:

$$\begin{cases} i = i_{cr} \\ i = \frac{\Delta H}{L} = \left(\frac{h - 60}{60}\right) \\ i_{cr} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \left(\frac{20 - 10}{10}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{h - 60}{60}\right) = 1 \Rightarrow h = 120 \text{ cm} = 1.2 \text{ m}$$

کتاب خاک - تست (۵۴) صفحه (۱۴۹) که مربوط به کنکور سراسری ۷۲ است.

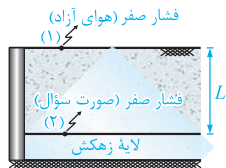
در مدل مقابل ارتفاع آب در بالادست ( $h$ ) چه مقدار تنظیم گردد تا خاک اشباع داخل استوانه (وزن مخصوص ۲ تن بر مترمکعب) به حالت جوشش (سیلان یا روانگرایی) درآید؟ (سراسری-۷۲)

(۱) ۴۵ cm  
(۲) ۶۰ cm  
(۳) ۷۵ cm  
(۴) ۹۰ cm

گزینه (۲)

$$FS = 1 \Rightarrow \frac{i_{cr}}{i} = 1 \Rightarrow i = i_{cr} \Rightarrow \frac{\Delta H}{L} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \Rightarrow \frac{h - 30}{30} = \frac{2 - 1}{1} \Rightarrow h = 60 \text{ cm}$$

(۲) - ۷۱



$$i = \frac{\Delta H}{L} = \frac{(z_1 - z_2) + \left(\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma}\right)}{L} = \frac{L + (0 - 0)}{L} = 1$$

کتاب خاک - تقریباً شبیه تست (۷۴) صفحه (۱۴۳) است.

شکل مقابل گودالی را نشان می‌دهد که در خاک ماسه‌ای حفر شده و پس از عایق‌بندی از آب پر می‌شود. مقدار گرادیان هیدرولیکی در لایه رسی واقع در زیر گودال چقدر است؟

(۱) ۹/۴  
(۲) ۴/۹  
(۳) ۱/۴  
(۴) ۱/۵

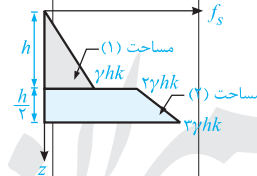
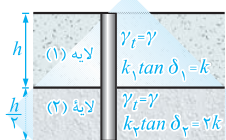
گزینه (۴)

در پایین‌ترین قسمت لایه رسی، تراز پیزومتری از تراز پیزومتری لایه آرتزین (سطح آب در پشت دیوار سنگی) تبعیت می‌کند و در بالاترین قسمت لایه رسی نیز سطح آب زیرزمینی، تراز پیزومتری نقاط واقع بر خود را نشان می‌دهد، بنابراین اختلاف تراز پیزومتری یا همان اختلاف بار آبی در لایه رسی برابر است با:

$$\Delta H = 6 \text{ m} \Rightarrow i = \frac{\Delta H}{L} = \frac{6}{4} = 1.5$$

(۴) - ۷۲

با ترسیم نمودار  $f_s - z$ ، خواهیم داشت:



$$\frac{Q_{s_2}}{Q_{s_1}} = \frac{P \int_0^h f_s dz}{P \int_h^{2h} f_s dz} = \frac{\text{مساحت (۲)}}{\text{مساحت (۱)}} = \frac{\frac{(3\gamma h k + 2\gamma h k)}{2} \left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{\gamma h k \times h}{2}} = \frac{\frac{5}{4} \gamma h^2 k}{\frac{1}{2} \gamma h^2 k} = 2.5$$

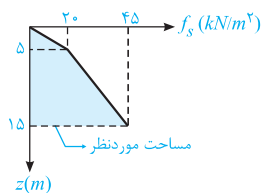
کتاب پی - تمرین (۳) صفحه (۲۴۸)

یک شمع شناور بتنی به شکل مربع با طول ضلع یک متر بصورت مقابل در یک خاک ماسه‌ای اجرا شده است. اگر رابطه تنش جانبی حداکثر در طول شمع بصورت  $\sigma'_p = 0.25 f_s$  باشد، در آن صورت مقاومت نهایی شمع چقدر است؟ (برحسب kN)

(۱) ۱۶۰ kN  
(۲) ۲۰۰ kN  
(۳) ۲۴۰ kN  
(۴) ۲۸۰ kN

هاله چون شمع شناور است، بنابراین مقاومت نهایی آن برابر مقاومت جانبی بوده و خواهیم داشت:

$$Q_u = Q_s, \quad Q_s = \int_0^L f_s(z) P(z) dz \xrightarrow{\text{در طول } L \text{ ثابت است}} Q_s = P \int_0^L f_s(z) dz$$



برای محاسبه حاصل انتگرال مذکور، کافی است تا سطح زیر نمودار  $f_s - z$  را بدست آوریم. جهت رسم این نمودار، ابتدا با استفاده از رابطه  $f_s = 0.25 \sigma'_v$ ، تنش اصطکاکی را در ۳ عمق  $z = 0$ ،  $z = 5m$  و  $z = 15m$  بدست می آوریم:

$$f_s = 0.25 \sigma'_v = \begin{cases} z = 0 \Rightarrow \sigma'_v = 0 \Rightarrow f_s = 0 \\ z = 5m \Rightarrow \sigma'_v = 16 \times 5 = 80 \Rightarrow f_s = 0.25 \times 80 = 20 \text{ kN/m}^2 \\ z = 15m \Rightarrow \sigma'_v = 16 \times 5 + (20 - 10) \times 10 = 180 \Rightarrow f_s = 0.25 \times 180 = 45 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

سپس می نویسیم:

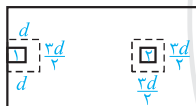
$$\int_0^L f_s(z) dz = (\text{مساحت زیر نمودار } f_s - z) = \left[ \left( \frac{20 \times 5}{2} \right) + \left( \frac{45 + 20}{2} \right) (15 - 5) \right] = 375 \text{ kN}$$

و در نهایت برای محاسبه  $Q_s$  خواهیم داشت:

$$Q_s = \text{محیط شمع} \times (\text{مساحت زیر نمودار } f_s - z) = (1 \times 4) (375) = 1500 \text{ kN}$$

۷۳- (۲)

مقطع بحرانی برش پانچ به فاصله  $\frac{d}{4}$  از لبه دورتادور ستون بتنی اتفاق می افتد که با توجه به این که بعد ستون ها  $\frac{d}{4}$  است، ابعاد محدوده برش پانچ به صورت مقابل خواهد بود:



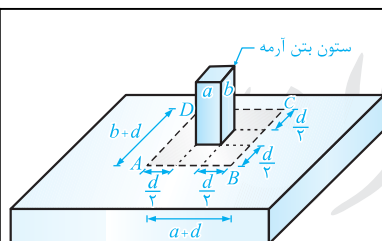
حال در ادامه نسبت مساحت ها و محیط های پانچ را به صورت زیر می یابیم:

$$\frac{A_{P_2}}{A_{P_1}} = \frac{\frac{rd}{2} \times \frac{rd}{2}}{\frac{rd}{2} \times d} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{P_{C_2}}{P_{C_1}} = \frac{\frac{rd}{2} \times 4}{2 \times d + \frac{rd}{2}} = \frac{6}{7} = \frac{12}{7}$$

بنابراین گزینه ی (۲) درست است.

کتاب پی - توضیحات صفحات (۱۷۸) و (۱۷۹)



خرابی برشی پانچ: این نوع خرابی در محدوده ای در اطراف ستون، در مقطعی به نام «مقطع بحرانی برش پانچ» ایجاد می شود که طبق توصیف آیین نامه های بتنی، این ناحیه در فاصله  $\frac{d}{4}$  از هر وجه ستون بتنی در نظر گرفته می شود. برای ستون های فلزی نیز این ناحیه را در فاصله  $\frac{d}{4}$  از صفحه زیر ستون در نظر می گیرند. در شکل مقابل ناحیه پانچ را برای یک ستون بتنی مشاهده می کنید. (چهار ضلعی ABCD)

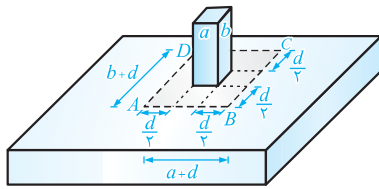
پس از شناخت نیروی برشی مقاوم ( $V_c$ ) و نیز نیروی برشی مخرب ( $V_u$ )، حالا نوبت آن است که با چگونگی محاسبه این نیروهای برشی آشنا شویم.

● نحوه محاسبه  $V_c$  (نیروی برشی مقاوم)

همانطور که گفته شد، نیروی برشی مقاوم فقط ناشی از مقاومت برشی بتن می باشد که طبق روابط آیین نامه های بتنی برابر است با:

$$\text{برش معمولی: } V_c = 0.12 \phi_c B d \sqrt{f_c}$$

$$\text{برش پانچ: } V_c = 0.14 \phi_c \sqrt{f_c} \times \bar{A}$$



ارتفاع مؤثر  $\times$  محیط پانچ  $\bar{A}$

$$\bar{A} = 2[(a+d) + (b+d)] \times d = 2d(a+b+2d)$$

در نهایت  $V_C$  (مقاومت برشی مقطع) برحسب نیوتن ( $N$ ) بدست می‌آید.

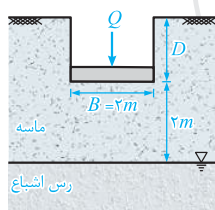
● نحوه محاسبه  $V_u$  (نیروی برشی مخرب مقطع)

نیروی برشی  $V_u$ ، یک نیروی داخلی می‌باشد که از روابط تعادل استاتیکی بدست می‌آید. توجه شود که در محاسبه  $V_u$  باید از بارهای ضریب‌دار استفاده کنیم. تمرین زیر چگونگی محاسبه  $V_u$  را در هر دو مقطع برش یک طرفه و برش پانچ نشان می‌دهد.

۷۴- (۴)

لایه رس اشباع به علت نشست تحکیم باعث افزایش نشست پی خواهد شد، یعنی در نگاه اول گزینه‌های (۱) یا (۴) می‌توانند درست باشند اما: اگر منظور طراح تأثیر سفره آب زیرزمینی باشد، باید بگوییم که سطح سفره آب زیرزمینی به گونه فعال زیر پی نمی‌رسد ( $H = 1/5 B > B$ ) و سفره آب زیرزمینی اثری بر ظرفیت باربری پی ندارد ولی به نظر می‌رسد که منظور طراح، تأثیر خود لایه‌رسی بر لایه ماسه‌ای است، در این حالت باید بگوییم که لایه ضعیف رس اشباع (که هم ریزدانه است و هم آب دارد) از ظرفیت باربری پی بر مبنای ماسه تنها، می‌کاهد و گزینه (۴) درست است.

تست (۷۰) صفحه (۲۰۲) و صفحه (۱۴۰) تمرین (۲۳)



کدام گزینه در رابطه با شالوده شکل مقابل صحیح است؟

- (۱) وجود لایه رسی تأثیر بر میزان نشست شالوده ندارد.
- (۲) وجود لایه رسی باعث کاهش ظرفیت باربری شالوده می‌گردد.
- (۳) وجود لایه رسی ظرفیت باربری را کاهش داده و باعث ازدیاد نشست نهایی می‌گردد.
- (۴) وجود لایه رسی تأثیری بر ظرفیت باربری شالوده ندارد اما باعث ازدیاد نشست نهایی می‌گردد.

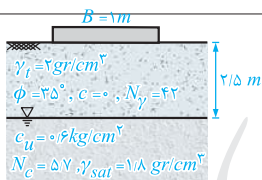
گزینه (۳)

با توجه به نزدیک بودن خاک رس به کف شالوده ( $H/B = 1/5 < 1/5$ ) می‌توان انتظار داشت که این لایه بر ظرفیت باربری شالوده (در حالتی که فقط زیر آن ماسه است) تأثیر گذاشته و آنرا کم کند. در ضمن لایه رسی به علت اشباع بودن و نشست تحکیم، باعث ازدیاد نشست نهایی شالوده می‌گردد.

یک پی نواری به عرض یک متر روی یک لایه ماسه و یک لایه رس اشباع مطابق شکل قرار دارد. ظرفیت باربری نهایی

کوتاه مدت تقریباً چند  $kg/cm^2$  است؟ ( $N_c = 5/7$  و  $\gamma_{sat} = 1/8 gr/cm^3$ ،  $c_u = 0/6 kg/cm^2$ )

هله



$$\begin{cases} \frac{H}{B} = \frac{2/5}{1} = 2/5 \Rightarrow 1/5 < \frac{H}{B} < 3/5 \\ \frac{H}{B} = 1/5 \Rightarrow q_{ult} > cN_c = 0/6 \times 5/7 = 3/42 kg/cm^2 \Rightarrow q_{ult} = 3/42 kg/cm^2 \\ \frac{H}{B} = 3/5 \Rightarrow q_{ult} = 0/5 \gamma B N_\gamma = 0/5 \times 0/002 \times 100 \times 42 = 4/2 kg/cm^2 \end{cases}$$

$$\frac{H}{B} = 1/5 \quad \frac{H}{B} = 2/5 \quad \frac{H}{B} = 3/5 \quad \xrightarrow{\text{درون یابی خطی}} \quad \frac{3/5 - 1/5}{4/2 - 3/42} = \frac{3/5 - 2/5}{4/2 - q_{ult}}$$

$$\Rightarrow q_{ult} = 3/81 kg/cm^2$$

توجه: همان‌طور که ملاحظه شد، به ازای  $H/B = 1/5$  مقدار  $q_{ult}$  کمی بزرگتر از  $3/42 kg/cm^2$  است که ما آن را تقریباً برابر  $3/42 kg/cm^2$  در نظر گرفتیم. به همین دلیل ظرفیت باربری نهایی نیز کمی از  $3/81 kg/cm^2$  بزرگتر است که ما آن را تقریباً برابر  $q_{ult} = 3/81 kg/cm^2$  در نظر گرفتیم.

می‌دانیم رابطه ضریب عکس‌العمل بستر در پی‌های مربعی ( $K_f$ ) با ضریب عکس‌العمل بستر برای صفحه آزمایش ( $K_s$ ) در مورد خاک‌های صرفاً چسبنده و دانه‌ای به صورت زیر است:

$$\begin{cases} K_f = K_s \left( \frac{B_P}{B_F} \right) & \text{(صرفاً چسبنده)} \\ K_f = K_s \left( \frac{B_F + B_P}{2B_F} \right)^2 & \text{(دانه‌ای)} \end{cases}$$

پس می‌توان  $K_f$  را به سادگی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$K_f = K_s \left( \frac{B_F + B_P}{2B_F} \right)^2 = 2 \times \left( \frac{2+0.3}{2 \times 2} \right)^2 = 0.66 \frac{kg}{cm^2}$$

در ادامه با توجه به میزان نشست مجاز، به صورت زیر ظرفیت باربری مجاز را می‌یابیم:

$$q = K \delta \Rightarrow q_F = K_f \delta_F \Rightarrow q_F = 2 \times 0.66 = 1.32 \frac{kg}{cm^2}$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

**توجه:** ممکن است برخی از شما عزیزان به اشتباه از رابطه  $\delta_F \left( \frac{2.28 B_F + 1}{B_F} \right)^2 = \delta_P \left( \frac{3.28 B_P + 1}{B_P} \right)^2$  (که مربوط به رابطه نشست‌ها می‌باشد) استفاده کرده باشید که البته هیچ ارتباطی با سؤال مطرح شده در آزمون ندارد!

کتاب پی - تست (۱۴۱) صفحه (۱۹۷)

جهت تخمین مدول الاستیسیته خاک منطقه‌ای، از آزمایش بارگذاری صفحه ( $P.L.T.$ ) استفاده شده است. در این آزمایش ابعاد صفحه  $40\text{ cm} \times 40\text{ cm}$  بوده و ابعاد پی اصلی  $2\text{ m} \times 2\text{ m}$  می‌باشد. اگر ضریب عکس‌العمل بستر از آزمایش  $k_s = 2/5\text{ kg/cm}^2$  محاسبه شده باشد، با در نظر گرفتن ضریب پواسون  $\mu = 0.3$  و  $I_P = 1$  برای خاک و پی،  $E_s$  چند  $kg/cm^2$  بدست می‌آید؟ خاک منطقه ماسه‌ای بوده و  $k_f = \left( \frac{B_F + B_P}{2B_F} \right)^2 k_s$  می‌باشد.

۸۱ (۱)      ۹۱ (۲)      ۲۰۰ (۳)      ۱۶۳ (۴)

گزینه (۴)

ابتدا با توجه به رابطه داده شده در انتهای سؤال،  $k_f$  (ضریب عکس‌العمل بستر) خاک زیر پی اصلی را می‌یابیم:

$$k_f = \left( \frac{B_F + B_P}{2B_F} \right)^2 k_s = \left( \frac{2+0.4}{2 \times 2} \right)^2 \times 2/5 = 0.9\text{ kg/cm}^2$$

از طرفی از مقایسه دو رابطه زیر برای نشست آنی (مشابه با تمرین ۴۷) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} q = k_f S_e \Rightarrow S_e = \frac{q}{k_f} \\ S_e = qB \frac{1-\mu}{E_s} I_P \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{k_f} = B \frac{1-\mu}{E_s} I_P \Rightarrow E_s = k_f B (1-\mu) I_P$$

لذا با جایگذاری  $k_f = 0.9$  و  $B = B_F = 200\text{ cm}$  و مقادیر  $\mu$  و  $I_P$  خواهیم داشت:

$$E_s = 0.9 \times 200 \times (1-0.3) \times 1 = 126\text{ kg/cm}^2$$

در این حالت ظرفیت باربری نهایی، بین دو حالت خاک اشباع و خاک تر قرار می‌گیرد، بنابراین می‌نویسیم:  
الف- بر مبنای خاک اشباع

$$q_{ult} = 0.5 B \gamma' N_\gamma = 0.5 \times 2 \times (2-1) \times 30 = 30 \frac{t}{m^2}$$

ب - بر مبنای خاک تر

$$q_{ult} = 0.5 B \gamma_t N_\gamma = 0.5 \times 2 \times 1/8 \times 30 = 54 \frac{t}{m^2}$$

پس گزینه (۳) درست است.

**توجه:** در این سؤال طراح محترم از اثر ضریب شکل  $s_\gamma$  صرف نظر کرده است و ما می توانیم با این فرض، مقدار دقیق جواب را برحسب وزن

مخصوص معادل ( $\gamma_e$ ) به دست آوریم:

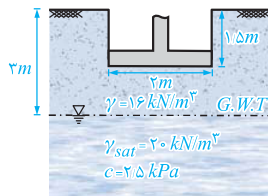
$$\gamma_e = \gamma' + \frac{d_w}{H} (\gamma - \gamma') = (2-1) + \frac{1}{2} [1/8 - (2-1)] = 1/4 \text{ t/m}^3$$

$$\hookrightarrow H = B = 2 \text{ m}$$

ملاحظه می کنید که پاسخ فوق در گزینه ها وجود ندارد، ولی در گزینه (۳)، میانگین (حد وسط) مقادیر داده شده، برابر  $42 \text{ t/m}^3$  می باشد.

### کتاب پی - تمرین (۱۴) قسمت (ب) صفحه (۱۲۶)

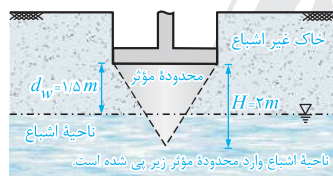
سه پی مربعی مطابق شکل طراحی شده اند. مشخصات خاک زیر هر پی ( $\gamma_{sat}$ ,  $\gamma$ ,  $c$ ,  $\phi$ ) و نیز تراز آب زیرزمینی ( $G.W.T$ ) در شکل ها مشخص است. مطلوب است محاسبه ظرفیت باربری خاک زیر هر پی.



$$(N_c = 40, N_q = 20, N_\gamma = 25)$$

(ب)

(ب) در این شکل  $d_w = 3 - 1/5 = 1/5 \text{ m}$  می باشد و  $H = B = 2 \text{ m}$  است. با مقایسه  $d_w$  و  $H$  داریم:



$$H = 2 \text{ m} > d_w = 1/5 \text{ m}$$

مطابق شکل ناحیه اشباع وارد محدوده مؤثر زیر پی شده است.

بنابراین در محاسبه ترم عرض، به جای  $\gamma$  از  $\gamma_e$  (وزن مخصوص معادل) استفاده می کنیم که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \gamma_e = \gamma' + \frac{d_w}{H} (\gamma - \gamma') \\ d_w = 1/5 \text{ m}, H = B = 2 \text{ m} \\ \gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w = 20 - 10 = 10 \text{ kN/m}^3, \gamma = 16 \text{ kN/m}^3 \end{cases} \Rightarrow \gamma_e = 10 + \frac{1/5}{2} (16 - 10) = 14/5 \text{ kN/m}^3$$

در ادامه  $q_{ult}$  را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} q_{ult} &= cN_c s_c + qN_q + 0.5\gamma_e B N_\gamma s_\gamma \\ q &= \gamma D_f = 16 \times 1/5 = 24 \text{ kPa} \\ \Rightarrow q_{ult} &= 2/5 \times 40 \times 1/3 + 24 \times 20 + 0.5 \times 14/5 \times 2 \times 25 \times 0.18 = 900 \text{ kPa} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  وزن مخصوص معادل  $\gamma_e$

### ۷۷- (۱)

نسبت ضریب اطمینان و واژگونی در حالت (۲) به حالت (۱) برابر است با:

$$\frac{FS_2}{FS_1} = \frac{\left(\frac{M_{R_2}}{M_{d_2}}\right)}{\left(\frac{M_{R_1}}{M_{d_1}}\right)}$$

چون  $M_{R_1} = M_{R_2}$  است (در هر دو حالت  $M_R$  ناشی از وزن دیوار است که مقداری ثابت می باشد)، بنابراین با توجه به این که  $C = 0$  است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{FS_2}{FS_1} &= \frac{M_{d_1}}{M_{d_2}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_t H^2 K_a \times \frac{H}{3}}{\frac{1}{2}\gamma' H^2 K_a \times \frac{H}{3} + \frac{1}{2}\gamma_w H^2 \times \frac{H}{3}} = \frac{\gamma_t K_a}{\gamma' K_a + \gamma_w} \\ \Rightarrow \frac{FS_2}{3} &= \frac{18 \times \tan^2(45 - \frac{30}{2})}{(20/5 - 10) \times \tan^2(45 - \frac{30}{2}) + 10} \Rightarrow FS_2 = 1/33 \end{aligned}$$

کتا پی - تست (۷۳) صفحه (۷۵) که مربوط به کنکور سراسری ۸۲ است.

مقطع یک دیوار حائل ثقیلی و خاک پشت آن در شکل داده شده است. در شرایطی که آب وجود ندارد، ضریب اطمینان در برابر واژگونی  $F.S. = 2/4$  است و هنگامی که خاک پشت دیوار از آب اشباع می‌شود و سطح آب به تراز تاج دیوار می‌رسد، دیوار واژگون می‌شود ( $F.S. = 1$ ). مطلوب است محاسبه  $\gamma$  (وزن مخصوص خاک قبل از اشباع شدن)

(۱)  $1/67$  تن بر مترمکعب  
 (۲)  $1/8$  تن بر مترمکعب  
 (۳)  $1/75$  تن بر مترمکعب  
 (۴)  $1/84$  تن بر مترمکعب

در ابتدا که خاک خشک است، توزیع فشارهای وارد بر دیوار به شکل زیر است:

$F.S._1 = 2/4 \Rightarrow \frac{M_{\text{مقاوم}}}{M_{\text{محرک}_1}} = 2/4 \Rightarrow \frac{W \times d}{M_{\text{محرک}_1}} = 2/4$

$\sigma_a = k_a \sigma_v = \gamma \sqrt{k_a} = k_a \sigma_v \Rightarrow \sigma_a = \frac{1}{3} \times (\gamma \times 3) = \gamma$

$k_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \frac{1 - 0.5}{1 + 0.5} = \frac{1}{3}$

همچنین با اشباع شدن خاک، توزیع فشارهای وارد بر دیوار بصورت زیر خواهد بود:

$\sigma_a = k_a \sigma'_v = \frac{1}{3} \times (2 - 1) \times 3 = 1 \text{ ton/m}^2$

$u = \gamma_w h = 1 \times 3 = 3 \text{ ton/m}^2$

$M_{\text{محرک}_2} = M_1 + M_2$

$= \left( \frac{1}{3} \times 1 \times 3 \times 1 \right) \times \left( \frac{3}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 1 \right) \times \left( \frac{3}{3} \right) = 6 \text{ ton.m}$

با فرض طول واحد دیوار

$F.S._2 = \frac{M_{\text{مقاوم}}}{M_{\text{محرک}_2}} \Rightarrow 1 = \frac{W \times d}{6} \Rightarrow W \times d = 6$

حال با جایگذاری لنگر مقاوم  $Wd = 6$  در رابطه حالت اول، خواهیم داشت:

$\frac{Wd}{M_{\text{محرک}_1}} = 2/4 \Rightarrow \frac{6}{M_{\text{محرک}_1}} = 2/4 \Rightarrow M_{\text{محرک}_1} = 2/5 \Rightarrow \frac{1}{3} \gamma \times 3 \times 1 \times 1 = 2/5 \Rightarrow \gamma = 1/67 \text{ ton/m}^3$

(۳) - ۷۸

$$\delta = q \times B \times \left( \frac{1 - \mu^2}{E} \right) I_p$$

می‌دانیم نشست الاستیک در زیر یک پی، (بدون عمق مدفون)، از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

 حال با فرض  $I_p$  یکسان برای هر دو پی و یکی بودن خاک زیر پی در هر دو حالت، خواهیم داشت:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{q_2}{q_1} \times \frac{B_2}{B_1} \Rightarrow \frac{1/5}{1} = \frac{2 \times 2}{70} \times \frac{2}{1} \Rightarrow P_2 = 210 \text{ N}$$

کتاب پی - تمرین (۴۴) صفحه (۱۶۸)

دو پی مربعی بر روی زمین یکنواخت، ایزوتروپ و الاستیک قرار گرفته‌اند و نیروهای روی ستون‌های وارد بر آنها مساوی نیستند، به طوری که  $P_1 > P_2$  است. به منظور اطمینان از نشست الاستیک مساوی برای این دو پی، باید چه نسبتی بین بارهای ستون‌ها و اندازه پی‌ها برقرار باشد.

$\sqrt{P_1 B_1} = \sqrt{P_2 B_2} \quad (1)$

$\frac{B_1}{B_2} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \quad (2)$

$P_1 B_1 = P_2 B_2 \quad (3)$

$\frac{B_1}{B_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad (4)$

$S_e = qB \left( \frac{1 - \mu_s^2}{E_s} \right) I_p$

با توجه به یکنواخت بودن خاک،  $E_s$  و  $\mu_s$  برای هر دو پی یکسان است. همچنین  $I_p$  به نسبت  $\frac{L}{B}$  پی‌ها بستگی دارد که چون هر دو پی مربعی هستند،  $\left( \frac{L}{B} \right)_1 = \left( \frac{L}{B} \right)_2 = 1$  بوده و لذا  $I_p$  پی‌ها نیز برابر است. بنابراین برای برابری نشست الاستیک دو پی باید داشته باشیم:

$S_{e1} = S_{e2} \Rightarrow \left( qB \frac{1 - \mu_s^2}{E_s} I_p \right)_1 = \left( qB \frac{1 - \mu_s^2}{E_s} I_p \right)_2$

$\mu_{s1} = \mu_{s2}, E_{s1} = E_{s2}, I_{p1} = I_{p2} \Rightarrow \frac{P_1}{B_1^2} \times B_1 = \frac{P_2}{B_2^2} \times B_2 \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{P_1}{P_2}$

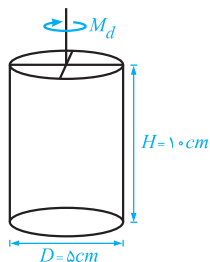
گزینه (۱) صحیح است.

$q = \frac{P}{B^2}$

اگر حالت (۱) مربوط به حضور سربار و حالت (۲) مربوط به عدم حضور سربار باشد، در آن صورت با توجه به اطلاعات مربوط به صورت سوال می‌نویسیم:

$$M_1 \leq 2M_2 \xrightarrow{C=0} \frac{1}{3}\gamma H^2 K_a \times \frac{H}{3} + qHK_a \times \frac{H}{3} \leq 2 \times \frac{1}{3}\gamma H^2 K_a \times \frac{H}{3}$$

$$\frac{1}{6}\gamma H + \frac{1}{3}q \leq \frac{1}{3}\gamma H \Rightarrow q \leq \frac{1}{3}\gamma H \Rightarrow q_{max} = \frac{\gamma H}{3}$$



در این سوال بایستی لنگر محرک ناشی از پیچش پره ( $M_d$ ) را با لنگر مقاوم خاک ( $M_R$ ) که روی سطح جانبی استوانه خاکی حول پره‌ها تشکیل می‌شود، برابر قرار دهیم که با فرض صرف نظر کردن از مقاومت خاک بالای پره خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M_d = M_R \\ M_R = F \times \frac{D}{3} = (C_u \times \pi DH) \left(\frac{D}{3}\right) = \frac{\pi}{3} C_u D^2 H \\ M_d = 3/14 = \pi N \cdot m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi = \frac{\pi}{3} \times C_u \times 0.05^2 \times 0.1 \Rightarrow C_u = 8000 \text{ Pa} = 8 \text{ KPa}$$

$$m_v = \frac{\Delta H}{H_0} \times \frac{1}{\Delta \sigma'} = \frac{\Delta e}{1+e_0} \times \frac{1}{\Delta \sigma'} = \frac{0.175}{1+0.5} \times \frac{1}{(45-10)} = 0.0033 \text{ KPa}$$

$$D = \frac{1}{m_v} = \frac{1}{0.0033} = 300 \text{ KPa}$$

$$a_v = m_v (1+e_0) = 0.0033 \times (1+0.5) = 0.005$$

کتاب خاک - تست (۵) صفحه (۲۹۵) و تست (۷) صفحه (۴۸۵)

در یک مرحله از آزمایش ادومتری تنش مؤثر از ۲ به ۴ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع افزوده شده و نسبت تخلخل نمونه از ۰/۹۵ به ۰/۸۵ کاهش می‌یابد. ضریب قابلیت فشرده‌گی حجمی نمونه چند سانتیمتر مربع بر کیلوگرم می‌باشد؟ (نسبت تخلخل اولیه نمونه ۱/۱ است)

$$\begin{matrix} 2/38 \times 10^{-2} & (4) & 2/27 \times 10^{-2} & (3) & 2/38 & (2) & 2/27 & (1) \end{matrix}$$

$$m_v = \frac{(\frac{\Delta V}{V_0})}{\Delta \sigma'} \quad \text{رابطه (۵-۳)} \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta e}{1+e_0} \quad \text{رابطه (۵-۷)} \Rightarrow m_v = \left(\frac{\Delta e}{1+e_0}\right) \times \frac{1}{\Delta \sigma'}$$

$$m_v = \left(\frac{0.95-0.85}{1+1}\right) \times \frac{1}{(4-2)} = \frac{1}{42} = 2/38 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

در یک آزمایش ادومتری روی یک نمونه خاک رسی، ضریب تراکم‌پذیری  $a_v = 0.015 \frac{1}{\text{kPa}}$  به دست آمده است. اگر نسبت تخلخل اولیه خاک ۲ باشد، مقدار مدول سختی محصور شده این خاک چند کیلو پاسکال است؟ اگر برای یک لایه خاک رسی با ضخامت ۱۶ متر و با این میزان سختی، نشست

$$\text{تحکیمی } 0.8 \text{ m} \text{ اندازه‌گیری شده باشد، تنش وارده بر سطح این خاک چند کیلو پاسکال بوده است؟ } (m_v = \frac{a_v}{1+e_0})$$

$$\begin{matrix} 5 \text{ و } 100 & (4) & 10 \text{ و } 200 & (3) & 6/6 \text{ و } 133 & (2) & 3/3 \text{ و } 66 & (1) \end{matrix}$$

$m_v$  نشان دهنده قابلیت تراکم‌پذیری خاک رس به هنگام تحکیم است و نرمی را نشان می‌دهد. بر همین اساس مدول الاستیسیته خاک یا همان

$$E = \frac{1}{m_v} = \frac{1+e_0}{a_v} = \frac{1+2}{0.015} = 200 \text{ kPa}$$

مدول سختی، عکس  $m_v$  خواهد بود. بنابراین می‌نویسیم:

در ادامه برای محاسبه تنش وارده بر خاک، از رابطه محاسبه نشست تحکیم (رابطه ۵-۱۶) کمک می‌گیریم:

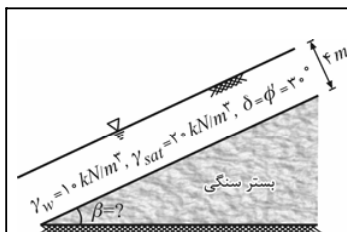
$$\Delta H = m_v H_0 \Delta \sigma' \Rightarrow 0.8 = \frac{1}{300} \times 16 \times \Delta \sigma' \Rightarrow \Delta \sigma' = 10 \text{ kPa}$$

بار وارد بر سطح خاک برابر  $\Delta \sigma = 10 \text{ kPa}$  است که با تبدیل شدن به تنش مؤثر  $\Delta \sigma' = 10 \text{ kPa}$ ، باعث نشست تحکیمی ۰/۸ متر در خاک رسی موردنظر می‌گردد.

$$FS = \frac{\gamma'}{\gamma_{sat}} \left( \frac{\tan \phi'}{\tan \beta} \right) \Rightarrow 1/5 = \left( \frac{20-10}{20} \right) \left( \frac{\tan \phi'}{\tan 30^\circ} \right) \Rightarrow \tan \phi' = \sqrt{3} \Rightarrow \phi' = 60^\circ$$

در شیروانی ماسه‌ای اشباع داریم:

کتاب خاک - تست (۱۱) و صفحه (۱۴۳)



یک لایه ماسه‌ای نامحدود مطابق شکل روبرو روی یک بستر سنگی قرار دارد. حداکثر شیب بستر سنگی چقدر باشد تا ضریب اطمینان پایداری شیروانی برابر ۲ شود؟

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{12} \quad (2)$$

$$\tan \beta = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (4)$$

$$\tan \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

گزینه (۲)

خاک موردنظر ماسه‌ای است، بنابراین  $c' = 0$  بوده و برای محاسبه ضریب اطمینان بایستی از رابطه (۷-۱۶) استفاده کرد. در این سؤال توجه داریم که  $\delta = \phi'$  است و می‌نویسیم:

$$FS = \left( \frac{\gamma'}{\gamma_{sat}} \right) \left( \frac{\tan \phi'}{\tan \beta} \right) \Rightarrow 2 = \left( \frac{20-10}{20} \right) \left( \frac{\tan 30^\circ}{\tan \beta} \right) \Rightarrow \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_c &= \frac{\Delta e}{\log \left( \frac{\sigma'_f}{\sigma'_o} \right)} = \frac{e_o - e_f}{\log \left( \frac{\sigma'_f}{\sigma'_o} \right)} \\ \sigma'_o = \gamma' z &= (20-10) \times 5 = 50 \frac{kN}{m^2} \Rightarrow 0.25 = \frac{1-e_f}{\log \left( \frac{50}{50} \right)} \Rightarrow e_f = 0.75 \\ \sigma'_f &= \sigma'_o + \Delta \sigma' = 50 + 45 = 95 \frac{kN}{m^2} \end{aligned} \right.$$

کتاب خاک - تمرین (۵-۹) صفحه (۲۷۲)

یک لایه رس عادی تحکیم‌یافته به ضخامت ۵ متر، نسبت تخلخل ۱/۵ و نشانه فشردگی ۰/۳ موجود است. تنش موثر در وسط لایه مذکور قبل از بارگذاری برابر  $1/2 \text{ kg/cm}^2$  می‌باشد که در اثر نوعی بارگذاری به اندازه  $10/8 \text{ kg/cm}^2$  به آن اضافه می‌شود. نسبت تخلخل و نشست خاک در پایان تحکیم چقدر خواهد بود؟

$$C_c = \frac{\Delta e}{\log \left( \frac{\sigma'_f}{\sigma'_o} \right)}, \quad \sigma'_f = \sigma'_o + \Delta \sigma' \Rightarrow 0.3 = \frac{1/5 - e_f}{\log \left( \frac{1/2 + 10/8}{1/2} \right)}$$

$$\Rightarrow 0.3 \log 10 = 1/5 - e_f \Rightarrow e_f = 1/5 - 0.3 \times 1 = 1/2$$

$$\Delta H = H_o \left( \frac{e_o - e_f}{1 + e_o} \right) = 500 \times \left( \frac{1/5 - 1/2}{1 + 1/5} \right) = 60 \text{ cm}$$

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سوال می‌توان نوشت:

$$W_w = W_1 - W_2 = 60 - 40 = 20 \text{ gr}$$

$$V_w = \frac{W_w}{\gamma_w} = \frac{20}{1} = 20 \text{ cm}^3$$

$$\text{در حالت اشباع: } V_s = V_{\text{کل}} - V_w \Rightarrow V_s = 35 - 20 = 15 \text{ cm}^3$$

$$G_s = \frac{W_s}{V_s \gamma_w} = \frac{40}{15 \times 1} = 2.67 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

**توجه ۱:** اگر چه پاسخ این تست را گزینه (۲) بدست آوردیم ولی باید بدانید که این تست غلط است زیرا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V = 20 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_1 - V_2 = 20 \text{ cm}^3 \Rightarrow 35 - V_2 = 20 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_2 = 15 \text{ cm}^3 \\ \Rightarrow V_2 = V_s \Rightarrow V_v = 0 \\ \text{طبق محاسبات وزنی - حجمی: } V_s = 15 \text{ cm}^3 \end{array} \right.$$

حجم توده خاک در حالت خشک  
حجم دانه‌های جامد

که البته چنین چیزی غیرممکن است، چرا که در هیچ حالتی توده خاک نمی‌تواند فقط حاوی دانه‌های خاک باشد و هیچ فضای خالی در آن وجود نداشته باشد!

**توجه ۲:** اگر فرض کنیم که طراح اشتباه کرده و منظورش آن است که حجم ثانویه به  $20 \text{ cm}^3$  رسیده است، در آن صورت می‌توان گفت در حد انقباض، به اندازه  $5 \text{ cm}^3$  ( $V_w = V - V_s = 20 - 15 = 5$ ) آب داریم که معادل  $5 \text{ gr}$  است. پس حد انقباض برابر می‌شود با:

$$\omega_{SL} = \frac{W_w}{W_s} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \Rightarrow SL = 12.5\%$$

کتاب خاک - تست (۱۴) صفحه (۵۴) و تست (۱۴) صفحه (۵۹)

نمونه‌ای از رس اشباع به حجم  $105 \text{ cm}^3$  و وزن  $210 \text{ gr}$  بعد از خشک شدن در کوره  $15 \text{ cm}^3$  کاهش حجم داده و وزنش نیز به  $175 \text{ gr}$  می‌رسد. چگالی دانه‌های جامد خاک کدام است؟

- گزینه (۱)  $2/5$  (۱)  $2/6$  (۲)  $2/67$  (۳)  $2/73$  (۴)

راه مل اول:

$$\omega = \frac{W_w}{W_s} = \frac{210 - 175}{175} = 0.2$$

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{G_s(1+\omega)}{1+e} \gamma_w \xrightarrow{e=\omega G_s} \gamma = \frac{W}{V} = \frac{G_s(1+\omega)}{1+\omega G_s} \gamma_w \Rightarrow$$

$$\frac{210}{105} = \frac{G_s(1+0.2)}{1+0.2 \times G_s} \times 1 \Rightarrow G_s = 2/5$$

$$V_w = \frac{W_w}{\gamma_w} = \frac{210 - 175}{1} = 35 \text{ cm}^3$$

$$G_s = \frac{W_s}{V_s \gamma_w} = \frac{175}{(105 - 35) \times 1} = 2/5$$

راه مل دوم:

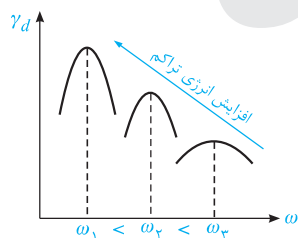
نمونه‌ای از رس اشباع به حجم  $100 \text{ cm}^3$  و به وزن  $210$  گرم بعد از خشک شدن، حجمش  $90 \text{ cm}^3$  و وزنش  $175$  گرم می‌شود. حد انقباض این خاک برابر است با:

- گزینه (۳)  $0/2$  (۱)  $0/4$  (۲)  $0/14$  (۳)  $0/28$  (۴)

$$SL = \left[ \frac{W_1 - W_2}{W_2} - \frac{(V_1 - V_2) \gamma_w}{W_2} \right] \times 100 = \left[ \frac{210 - 175}{175} - \frac{(100 - 90) \times 1}{175} \right] \times 100 = 14\%$$

۸۵- (۱)

شکل زیر منحنی تراکم برای چند خاک را نشان می‌دهد که تفاوت‌شان در انرژی تراکم آن‌ها می‌باشد:



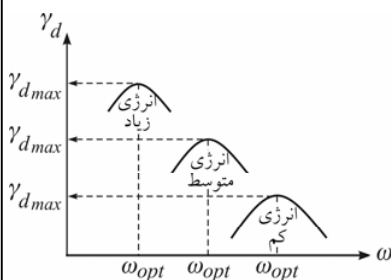
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با افزایش انرژی تراکم، منحنی تراکم به سمت بالا حرکت می‌کند، جمع‌تر می‌شود و رطوبت بهینه آن کاهش می‌یابد، بنابراین گزینه (۱) پاسخ صحیح است.

کتاب خاک - توضیحات صفحه (۴۸)

دو عامل مؤثر در تراکم خاک‌ها عبارتند از:

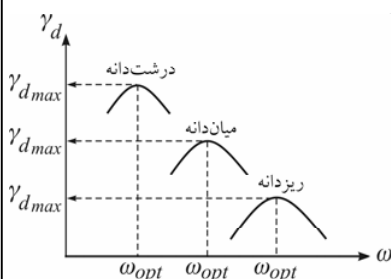
۱- انرژی تراکم:

اگر آزمایش تراکم بر روی نمونه‌هایی از یک نوع خاک با انرژی‌های تراکم مختلف انجام شود، نتیجه آن به صورت شکل (۱-۲۵) خواهد بود. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش انرژی تراکم از میزان رطوبت بهینه کاسته شده و به مقدار وزن مخصوص خشک حداکثر اضافه خواهد شد. به عبارت دیگر با افزایش انرژی، به تراکم بهتری می‌رسیم.

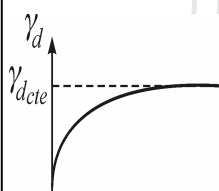


۲- نوع خاک:

اگر آزمایش تراکم با یک انرژی تراکم ثابت برای انواع خاک‌ها انجام شود، نتیجه آن به صورت شکل (۱-۲۶) خواهد بود. این شکل نشان می‌دهد خاک درشت‌دانه تراکم بهتری در مقایسه با سایر خاک‌ها دارد.



**تذکره (۱):** با افزایش انرژی تراکم، وزن مخصوص خشک خاک به صورت شکل (۱-۲۷) افزوده می‌شود ولی این افزایش تا یک حد مشخص ادامه دارد و بعد از آن  $\gamma_{dmax}$  ثابت می‌ماند. پس در یک کار عملی تعداد رفت و برگشت‌های غلتک نباید از یک مقدار مشخص بیشتر باشد، زیرا مفید واقع نخواهد شد و غیراقتصادی خواهد بود.



**تذکره (۲):** علت اینکه تراکم درشت‌دانه‌ها بهتر از ریزدانه‌ها انجام می‌شود آن است که ریزدانه‌ها سطح جانبی بیشتری نسبت به درشت‌دانه‌ها دارند. بنابراین برای آغشته کردن آنها با آب و کاهش اصطکاک، نیاز به رطوبت بیشتری است و این رطوبت بیشتر، فضای زیادتری از فضای خالی خاک را اشغال کرده و مانع تراکم بیشتر خاک می‌گردد.

**تذکره (۳):** در یک توده خاک هر چه دانه‌بندی کیفیت بهتری داشته باشد، تراکم خاک نیز بهتر خواهد بود.



سری عمران

## مکانیک سیالات و هیدرولیک

### کارشناسی ارشد

آزمون مکانیک سیالات و هیدرولیک در سال ۹۳ را می‌توان آزمونی متفاوت با آزمون‌های سال‌های اخیر دانست، زیرا اولاً تعداد سؤالات دشوار و جدید آن بیشتر بوده و ثانیاً درس هیدرولیک که معمولاً سؤالات روتین و ساده‌ای داشت، دشوار شده بود و سؤالات آن نیز با نگرشی نو و مفهومی طرح شده بود.

سطح بندی سؤالات این آزمون به شرح زیر است:

۸ سوال مشکل (۸۷-۸۸-۹۰-۹۵-۹۶-۹۸-۹۹-۱۰۳)

۶ سوال متوسط (۸۹-۹۱-۹۳-۹۴-۱۰۰-۱۰۴)

۶ سوال ساده (۸۶-۹۲-۹۷-۱۰۱-۱۰۲-۱۰۵)

#### و اما کتاب‌های سیالات و هیدرولیک سری عمران...

ممکن است با دیدن ۱۴ سوال مشکل و متوسط تصور کنید که همه آن‌ها کاملاً جدید بوده‌اند و مشابهی نیز ندارند، اما این تصور اشتباه است زیرا از این ۱۴ سوال، ۸ سوال را می‌توانید عیناً و یا با تغییرات اندک در کتاب‌های سری عمران ببینید. علت این موضوع آن است که در تهیه تست‌ها و تمرین‌های این کتاب‌ها، مراجع بسیاری را بررسی کرده‌ایم که طراحان نیز از همین مراجع، تست طرح می‌کنند و مطمئن هستیم که این موضوع را در سال‌های آینده نیز خواهید دید، به خصوص در کتاب‌های نسل جدید سری عمران

#### گروه پاسخ دهنده‌گان:

ساسان امیرافشاری، حسین فراهانی

سیالات و هیدرولیک

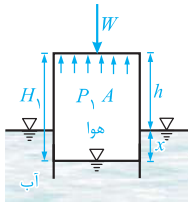
۸۶- (۲)

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow x dx = -y dy \xrightarrow{\int} -\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + y^2 = k$$

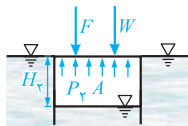
همانطور که ملاحظه می کنید، معادله بدست آمده مربوط به یک دایره می باشد.

۸۷- (۱)

مشخصات مربوط به شکل (الف) را با اندیس (۱) و شکل (ب) را با اندیس (۲) را نشان داده و می نویسیم:



شکل (الف)



شکل (ب)

$$\sum F_y = W = P_1 A \Rightarrow 20 = P_1 \times 0.2 \Rightarrow P_1 = 100 \text{ Pa}$$

$$P_1 = \gamma_w x \Rightarrow 100 = (10^4)(x) \Rightarrow x = 0.01 \text{ m}$$

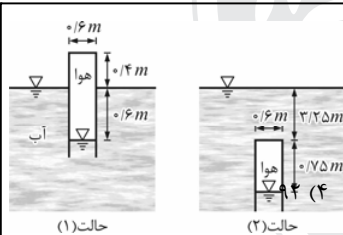
$$\Rightarrow H_1 = h + x = 0.24 + 0.01 = 0.25 \text{ m}$$

$$\begin{cases} P_1 V_1 = P_2 V_2 \\ V = AH \end{cases} \Rightarrow P_1 H_1 = P_2 H_2 \xrightarrow{P_2 = \gamma_w H_2} 100 \times 0.25 = (10^4 \times H_2) \times (H_2)$$

$$\Rightarrow H_2 = 0.05 \text{ m} \xrightarrow{P_2 = \gamma_w H_2} P_2 = 10^4 \times 0.05 = 500 \text{ Pa}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F + W = P_2 A \Rightarrow F + 20 = 500 \times 0.2 \Rightarrow F = 80 \text{ (N)}$$

کتاب سیالات- تست (۳۴) صفحه (۸۱)



حالت (۱)

حالت (۲)

یک استوانه را که در بالای آن هوا محبوس شده است، در دو وضعیت در داخل آب قرار می دهیم. در حالت اول استوانه در سطح آب شناور بوده و در حالت دوم آن را به صورت کامل داخل آب فرو می بریم. اگر دمای هوای محبوس داخل استوانه در حالت (۱) و (۲) یکسان باشد، فشار اتمسفر محلی چند کیلوپاسکال است؟ ( $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ )

۹۶ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۰۴ (۱)

گزینه (۳)

با توجه به ثابت ماندن دما، برای هوای محبوس حالت های (۱) و (۲) می توان رابطه زیر را نوشت:

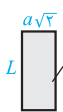
$$PV = mRT, T = \text{const} \Rightarrow PV = \text{const} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$$

$$(P_{atm} + 0.06 \times 10)(A \times 1) = (P_{atm} + 4 \times 10)(A \times 0.075) \Rightarrow P_{atm} = 96 \text{ kPa}$$

۸۸- (۲)

$$\overline{MG} = \overline{MB} - \overline{GB}$$

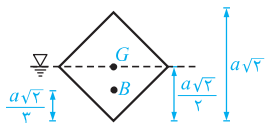
از هندسه شکل به دست می آید.



سطح جسم در تراز سطح آب

$$\overline{MB} = \frac{I}{\nabla_d} = \frac{(a\sqrt{2})^3 L}{12 \times 0.5 a^2 L} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\nabla_d = 0.5 \nabla = 0.5 a^2 L$$



$$\overline{GB} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow \overline{MG}_1 = \overline{MB} - \overline{GB} = \frac{a\sqrt{2}}{3} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{6} > 0 \Rightarrow \text{الوار در این حالت پایدار است.}$$

ارتفاع متاسنتریک به صورت زیر به دست می آید:

حالت (۱):

حالت (۲):

سطح جسم در تراز سطح آب

$$\overline{MB} = \frac{I}{\nabla_d} = \frac{\frac{a^3 L}{12}}{\frac{1}{2} a L} = \frac{a}{6}$$

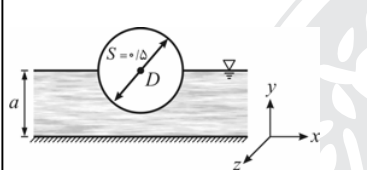


$$\overline{GB} = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \overline{MG} = \overline{MB} - \overline{GB} = \frac{a}{6} - \frac{a}{4} = -\frac{a}{12} < 0 \Rightarrow \text{الوار در این حالت ناپایدار است.}$$

کتاب سیالات- تست (۹۵) صفحه (۱۴۲) که سؤال کنکور سراسری ۸۳ است.

استوانه‌ای همگن به قطر  $D$  و ارتفاع  $h$  (عمود بر صفحه کاغذ) مطابق شکل بر روی آبی به عمق  $a$  شناور است. چگالی نسبی استوانه برابر با  $0.5$  می‌باشد. اگر پایداری (تعادل) این استوانه در مقابل دوران حول محور  $z$  مورد بررسی قرار گیرد، کدام گزینه صحیح است؟ (مرکز سطح نیم‌دایره به فاصله  $\frac{4r}{3\pi}$  از مرکز دایره واقع شده است).



- (۱) استوانه ناپایدار است.
- (۲) استوانه پایدار است.
- (۳) استوانه در وضعیت خنثی قرار دارد.
- (۴) اطلاعات مسئله برای بررسی پایداری استوانه کافی نیست.

**گزینه (۳)**

با نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم (برای استوانه)، خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W = F_B \Rightarrow (0.5 \gamma_w)(V) = (\gamma_w)(V_d) \Rightarrow V_d = \frac{1}{2} V$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود که استوانه تا نیمه در آب است. حال استوانه را به اندازه زاویه کوچک  $\theta$  حول محور  $z$  دوران داده و موقعیت متاسنتریک ( $M$ ) را مشخص می‌کنیم:

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در این حالت  $M$  و  $G$  بر هم منطبق می‌باشند، بنابراین  $\overline{MG} = 0$  و تعادل استوانه خنثی است.

**توضیح:** البته اگر در تست کتاب ارتفاع متاسنتریک را (مثل حل ارائه شده) برای استوانه مدور محاسبه کنیم، به دست می‌آید. بنابراین تعادل آن خنثی است.

۸۹- (۲)

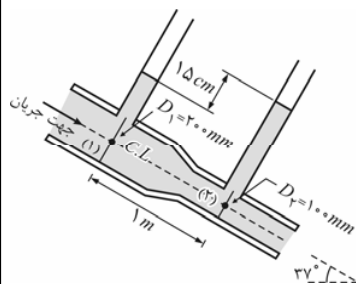
$$\tau_o = \frac{\gamma \Delta H D}{4L}$$

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 + \frac{P_1}{\gamma} &= z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \Delta H \\ \Delta z &= 5 \times \sin 30^\circ = 5 \times 0.5 = 2.5 \text{ m} \\ \frac{P_1 - P_2}{\gamma_w} &= \sqrt{3} \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.5 \text{ m} \end{aligned} \right. \Rightarrow 2.5 + 1.5 = \Delta H \Rightarrow \Delta H = 4 \text{ m}$$

(اختلاف ارتفاع قائم دو پیزومتر ملاک است)

$$\tau_o = \frac{\gamma \Delta H D}{4L} = \frac{1000 \times 4 \times 0.2}{4 \times 5} = 320 \text{ (Pa)}$$

کتاب سیالات- تمرین (۲-۶) صفحه (۲۶۸) و تست (۵) صفحه (۱۴۶۵)



مطابق شکل روبرو، آب در داخل یک لوله جریان دارد. با صرف نظر از کلیه تلفات، شدت جریان آب را به دست آورید. ( $\pi = 3$  ,  $\sin 37^\circ = 0.6$ )

می دانیم ارتفاع قائم سیال در پیژومتر، نشانگر ارتفاع نظیر فشار ( $\frac{P}{\gamma}$ ) در نقطه ای است که پیژومتر در آن قرار دارد. بنابراین با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} = 0.15 \times \cos 37^\circ = 0.12 \text{ m}$$

اگر سطح افقی گذرنده از نقطه (۲) را به عنوان سطح مبنا انتخاب کنیم، در آن صورت خواهیم داشت:

$$z_2 = 0, \quad z_1 = 1 \times \sin 37^\circ = 0.6 \text{ m}$$

با نوشتن معادله پیوستگی جریان بین دو مقطع (۱) و (۲) به دست می آید:

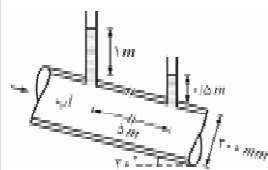
$$V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 \Rightarrow V_2 = \left(\frac{20}{10}\right)^2 V_1 \Rightarrow V_2 = 4 V_1$$

حال اگر معادله برنولی را بین دو نقطه (۱) و (۲) بنویسیم و مقادیر به دست آمده فوق را در این معادله جایگزین کنیم، در آن صورت خواهیم داشت:

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} \Rightarrow 0.6 + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + \frac{16 V_1^2}{2g} + 0.12 \Rightarrow V_1 = 0.8 \text{ m/s}$$

و در نهایت، مقدار شدت جریان (دبی حجمی) به صورت زیر به دست می آید:

$$Q = VA = (0.8) \left( \frac{\pi \times 0.02^2}{4} \right) = 0.025 \text{ m}^3/\text{s} = 25 \text{ lit/s}$$



در شکل مقابل مقدار تنش برشی در جدار لوله و نیز در فاصله ۳۰ میلیمتری از محور لوله به ترتیب برابر است با: ( $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$  و جریان آرام است).

$$\begin{aligned} & 90 \text{ Pa و } 450 \text{ Pa (۲)} \\ & 45 \text{ Pa و } 450 \text{ Pa (۴)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 75 \text{ Pa و } 75 \text{ Pa (۱)} \\ & 15 \text{ Pa و } 75 \text{ Pa (۳)} \end{aligned}$$

گزینه (۲)

سرعت جریان در لوله ثابت است بنابراین افت انرژی، مجموع افت فشار و افت ارتفاع خواهد بود:

$$\Delta H = \frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta z = (1 - 0.15) + (0.15 \sin 37^\circ) = 3 \text{ m}$$

$$\tau_0 = \frac{\Delta H \gamma D}{4L} = \frac{(3)(1000)(0.1)}{4 \times 5} = 450 \text{ Pa}$$

$$\tau = \tau_0 \left( \frac{r}{r_0} \right) = 450 \left( \frac{30}{150} \right) = 90 \text{ Pa}$$

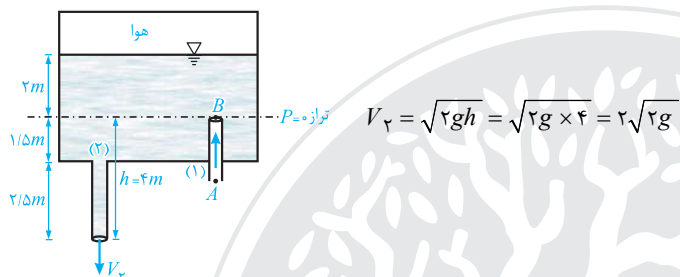
**توجه:**  $\Delta H$  میزان افت انرژی ناشی از اصطکاک در طول  $L$  از لوله می باشد. به طور کلی در لوله های مستقیم با سطح مقطع ثابت، افت انرژی تنها ناشی از اصطکاک است.

از آن جا که هوا در حال ورود به مخزن است، بنابراین لازم است در لوله شماره (۱) فشار منفی داشته باشیم. با نوشتن رابطه برنولی بین نقاط خارج لوله (۱) یعنی نقطه  $A$  و انتهای همین لوله (نقطه  $B$ ) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2 \\ P_A = 0, V_A = 0 \quad (\text{در هوای آزاد سرعت و فشار صفر است}) \\ V_B = 0 \quad (\text{داخل مخزن سرعت صفر است}) \end{cases} \Rightarrow P_B = 0 \Rightarrow \text{تراز فشار صفر در مخزن، همان نقطه بالایی (انتهایی) لوله}$$

یعنی در فاصله  $1/5m$  از کف مخزن

حال با نوشتن رابطه توربیلی و در نظر گرفتن تراز  $P = 0$  مطابق شکل، سرعت خروجی از لوله (۲) برابر می شود با:



برای حل این سؤال کافیت رابطه پیوستگی را به صورت مقابل بنویسیم:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = (VA)_{\text{خروجی}} - \frac{dy}{dt} A_{\text{مخزن}} = VA \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{A_{\text{خروجی}}}{A_{\text{مخزن}}} \times \sqrt{2gy} = -\frac{\pi d^2}{4BL} \sqrt{2gy}$$

توربیلی  $V = \sqrt{2gy}$

کتاب سیالات- تست (۱۸) صفحه (۲۸۹)

در کف یک مخزن مثلثی شکل به عرض  $b$  متر، روزنه ای به مساحت  $A_0$  تعبیه شده است. میزان تغییرات ارتفاع آب نسبت به زمان  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  در این مخزن کدام است؟ (از تلفات صرف نظر کنید.)

$$-\frac{2b}{A_0} \sqrt{\frac{2gh}{3}} \quad (۴)$$

$$-\frac{2b}{A_0} \sqrt{\frac{3gh}{2}} \quad (۳)$$

$$-\frac{A_0}{2b} \sqrt{\frac{3g}{h}} \quad (۲)$$

$$-\frac{A_0}{2b} \sqrt{\frac{2g}{3h}} \quad (۱)$$

گزینه (۱)

$$Q = Q_0 \quad (\text{معادله پیوستگی})$$

$$Q_0 = V_0 A_0 = \sqrt{2gh} \times A_0$$

$$Q = A(h) \left[ -\frac{dh}{dt} \right], \quad A(h) = b \times 2h \cot 30^\circ$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{3}bh \left(\frac{dh}{dt}\right) = A_0 \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{2b} \sqrt{\frac{2g}{3h}}$$

می‌دانیم توان حاصل ضرب نیرو در سرعت است، بنابراین می‌نویسیم:

$$P = FV = \rho V^2 L^2 \times V = \rho V^3 L^2$$

$$\frac{P_m}{P_p} = \frac{(\rho V^3 L^2)_m}{(\rho V^3 L^2)_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \times \left(\frac{V_m}{V_p}\right)^3 \times \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^2$$

$$\text{عدد فرود مهم است} \rightarrow Fr_m = Fr_p \Rightarrow \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_m}{P_p} = 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10^2 \cdot \sqrt{10}} \Rightarrow \frac{P_m}{P_p} = \frac{1}{10^2 \cdot \sqrt{10}} \Rightarrow P_p = 10^2 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{j}{s} = 20 \cdot \frac{kJ}{s}$$

کتاب سیالات- تست (۱) صفحه (۵۳۱) که سؤال کنکور سراسری ۹۲ است

یک مدل هیدرولیکی از حوضچه آرامش یک سد با مقیاس  $\frac{1}{50}$  ساخته شده است. اگر استهلاک انرژی کل در مدل آزمایشگاهی در یک زمان مشخص ۱ ژول باشد، مقدار استهلاک انرژی کل در مدل واقعی در زمان نظیر آن چند ژول است؟ (سیال مورد استفاده در هر دو مدل یکسان است)

$$\begin{array}{cccc} \frac{5}{50^2} (1) & 50 (2) & \frac{5}{50^2} (3) & 50^4 (4) \end{array}$$

گزینه (۴)

با توجه به صورت سؤال، انرژی (یا همان کار) تلف شده در نمونه اصلی ( $E_p$  یا  $W_p$ ) موردنظر می‌باشد. از آنجاکه حوضچه آرامش را مدل‌سازی نموده‌ایم، عدد فرود اهمیت پیدا می‌کند و باید این عدد در مدل و نمونه اصلی یکسان باشد. بنابراین طبق مطالب گفته شده در قسمت (۴-۸) از فصل هشتم داریم:

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow V_r = \sqrt{L_r}$$

حال نسبت کار در مدل به نمونه اصلی را تشکیل می‌دهیم. برای محاسبه کار، از رابطه  $W = F \cdot L$  استفاده کرده و در آن نیروی  $F$  را به صورت  $F = \rho V^2 A$  در نظر می‌گیریم.

$$\frac{W_m}{W_p} = \frac{(F \cdot L)_m}{(F \cdot L)_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \times \frac{V_r^3 \times L_r^2 \times L_r}{V_p^3 \times L_p^2 \times L_p} = \left(\frac{\sqrt{L_r}}{\sqrt{L_p}}\right)^3 \times \frac{L_r^3}{L_p^3} = \left(\frac{L_r}{L_p}\right)^{\frac{7}{2}} = \left(\frac{1}{50}\right)^{\frac{7}{2}}, W_m = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W_p} = \left(\frac{1}{50}\right)^{\frac{7}{2}} \Rightarrow W_p = 50^{\frac{7}{2}} (j)$$

با کمک رابطه برنولی و رابطه مانومتری محاسبه فشار، داریم:

الف) برنولی

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \xrightarrow{A = \pi D^2/4} V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2 \Rightarrow V_1 \times 8/5^2 = 4 \times 4/25^2 \Rightarrow V_1 = 1 \frac{m}{s}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{16 - 1}{20} \Rightarrow P_1 - P_2 = 7/5 (KPa)$$

ب) رابطه مانومتری فشار

$$P_1 + h\gamma_w - sh\gamma_w = P_2 \Rightarrow P_1 - P_2 = (s-1)h\gamma_w$$

و در نهایت از تساوی روابط به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$\Rightarrow 7/5 = (s-1) \times 0/75 \times 10 \Rightarrow s-1=1 \Rightarrow s=2$$

کتاب سیالات- تمرین (۶-۵) صفحه (۲۷۰)

در شکل مقابل، دبی آب عبوری از لوله وانتوری را به دست آورید. تلفات (افت ارتفاع) بین لوله اصلی و گلوگاه وانتوری متر برابر  $\frac{V_1^2}{2g}$  است. ( $\pi \approx 3$ )

هله با استفاده از معادله برنولی و رابطه مانومتری محاسبه فشار، خواهیم داشت:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = (z_2 - z_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta H$$

$$P_1 - [(-z_1) + \Delta h] \gamma + \Delta h \gamma_0 + (-z_2) \gamma = P_2 \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = (z_2 - z_1) + \Delta h \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta H = \Delta h \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}\right)$$

حال با به کارگیری رابطه به دست آمده و معادله پیوستگی جریان می نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta H = \Delta h \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}\right), \gamma = \gamma_w \\ V_2 = V_1 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} \left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right) + \Delta H = \Delta h (1 - S)$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2 \times 100} \left[\left(\frac{100}{50}\right)^4 - 1 + 0.7\right] = 0.38 \times (1 - 0.5) \Rightarrow V_1 = 0.5 \text{ m/s}$$

$$Q = A_1 V_1 = \left(\frac{\pi \times 0.1^2}{4}\right)(0.5) = 0.0039 \text{ m}^3/\text{s} = 3.9 \text{ lit/s}$$

۹۴- (۱)

مجموع نیروهای وارد بر دو طرف صفحه با استفاده از قانون لزجت نیوتن به صورت زیر به دست می آید:

$$F = (\tau A)_1 + (\tau A)_2 = \mu \frac{VA}{t-y} + \mu \frac{VA}{y} = \mu VA \left(\frac{1}{t-y} + \frac{1}{y}\right)$$

$$F \text{ برای حداقل شدن } \frac{dF}{dy} = 0 \Rightarrow \mu VA \left[\frac{1}{(t-y)^2} - \frac{1}{y^2}\right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{(t-y)^2} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{t-y} = \frac{1}{y} \Rightarrow 2y = t-y \Rightarrow y = \frac{t}{3}$$

کتاب سیالات- تست (۲۵) صفحه (۳۲)

یک ورق نازک مطابق شکل، بین دو سطح ثابت که به فاصله اندک  $e$  از یکدیگر قرار گرفته اند، حرکت داده می شود. اگر در یک طرف صفحه متحرک، روغن با ویسکوزیته  $\mu$  و در طرف دیگر آن روغن با ویسکوزیته  $4\mu$  وجود داشته باشد، صفحه متحرک باید در چه فاصله ای از سطح پایینی قرار گیرد تا نیروی لازم جهت کشیدن آن با سرعت ثابت  $U$  حداقل شود؟

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = F_f = VA \left(\frac{\mu_1}{h_1} + \frac{\mu_2}{h_2}\right) = UA \left(\frac{\mu}{e-x} + \frac{4\mu}{x}\right)$$

$$\frac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{(e-x)^2} - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{e-x} = \pm \frac{2}{x} \Rightarrow x = 2e, x = \frac{2e}{3}$$

جواب  $x = \frac{2e}{3}$  عملاً غیر قابل قبول است، بنابراین فاصله صفحه متحرک از صفحه پایینی برابر  $x = \frac{2e}{3}$  می باشد.

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left( \frac{V(y)}{\bar{V}} \right)^2 dA$$

$$dA = 2y \, dy, \quad \bar{V} = \frac{1}{A} \int_0^1 V(y) \, dy = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \int_0^1 ky \times 2y \, dy = 2k \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2k}{3}$$

$$A = zy^2 = 1 \times 1^2 = 1 \, m^2$$

$$\alpha = \frac{1}{1} \times \int_0^1 \left( \frac{ky}{\frac{2k}{3}} \right)^2 \times 2y \, dy = \frac{27}{4} \int_0^1 y^4 \, dy = \frac{27}{4} \times \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{27}{4} \times \frac{1}{5} = 1/35$$

کتاب سیالات- تست (۲۶) صفحه (۲۹۱)

جریان آب با دبی  $2 \, m^3/s$  و عمق یک متر در یک کانال مثلثی با زاویه رأس  $90^\circ$  درجه برقرار است. توزیع سرعت در مقطع جریان از رابطه  $u(y) = ky$  پیروی می کند که در آن  $y$  از کف کانال اندازه گیری می شود و  $k$  ضریب ثابتی می باشد. ضریب تصحیح انرژی جنبشی ( $\alpha$ ) برابر چند به دست می آید؟

(۱) ۱ (۲) ۱/۱۲۵ (۳) ۱/۳۵ (۴) ۱/۵

**گزینه (۳)**

با انتخاب المان سطح  $dA$  مطابق شکل، خواهیم داشت:

بنابراین می توان نوشت:

$dA = 2y \, dy$

$V = \frac{1}{A} \int u \, dA = \frac{1}{1} \int_0^1 (ky)(2y \, dy) = \frac{2k}{3}$

$\alpha = \frac{1}{A} \int \left( \frac{u}{\bar{V}} \right)^2 dA$

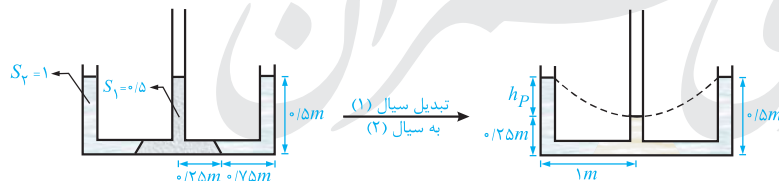
$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{1} \int_0^1 \left[ \frac{ky}{\frac{2k}{3}} \right]^2 (2y \, dy) = \int_0^1 \frac{27}{4} (y^4) \, dy = \frac{27}{4} \times \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{27}{20} = 1/35$$

این سوال اساسا ایراد دارد! چرا که در وضعیت سکون (قبل از دوران) وضعیت داده شده برای سیال ها نمی تواند برقرار باشد. علت آن است که با توجه به آن که نقاط هم تراز، هم فشار هستند، باید  $P_A = P_B$  باشد که این طور نیست!

$$P_A = \gamma_1 h_1 = 1 \times \gamma_w \times 0.25 = 0.25 \gamma_w$$

$$P_B = \gamma_2 h_2 = 0.5 \times \gamma_w \times 1 = 0.5 \gamma_w$$

ولی اگر این ایراد را در نظر نگیریم، طبق نظر طراح، در وضعیت نهایی شکل مایعات در لوله ها به صورت زیر خواهد بود:



توضیح آنکه با توجه به چگالی سیال در لوله وسطی ( $S_1 = 0.5$ ) می توان  $0.5 \, m$  ارتفاع آن را با  $0.25 \, m$  سیال با چگالی  $S_2 = 1$  معادل نمود.

حال با توجه به ارتفاع سهمی گون نشان داده شده در شکل، خواهیم داشت:

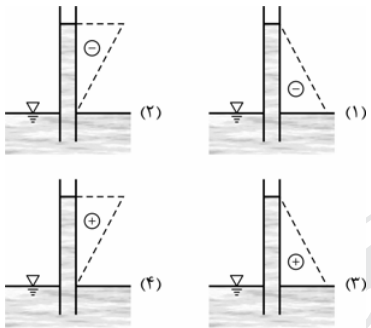
$$\begin{cases} h_p = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \\ h_p = 0.5 - 0.25 = 0.25 \, m \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega^2 \times 1^2}{2g} = 0.25 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{g}$$

۹۷- (۴)

می‌دانیم در داخل لوله موئینه، چون در سیال بالاتر از تراز  $P = 0$  فشار منفی بوده و به صورت خطی تغییر می‌کند، از این رو توزیع فشار در لوله مطابق حالت (۳) بوده و بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

کتاب سیالات- تست (۱۰) صفحه (۵۱۹) که سؤال کنکور سراسری ۹۰ است

توزیع صحیح فشار در بالا آمدگی سیال در داخل یک لوله موئین کدام گزینه است؟



۱ (۱)  
 ۴ (۲)  
 ۳ (۳)  
 ۲ (۴)

**گزینه (۴)**

در سطح آزاد مایع فشار نسبی برابر صفر بوده که با حرکت به سمت بالا و پایین در مایع، فشار به ترتیب کم و زیاد می‌شود، پس فشار نسبی نیز به ترتیب منفی و مثبت خواهد شد. در این سؤال با بالا رفتن از سطح آزاد در لوله موئین، فشار از صفر به مقدار  $\gamma h_c$  خواهد رسید. بنابراین پاسخ صحیح حالت (۲) یا همان گزینه (۴) است.

**توجه:** سطح مایع در لوله موئین سطح آزاد مایع به حساب نمی‌آید.

۹۸- (۲)

در جریان آب در کانال‌های روباز، توزیع فشار در هر دو راستای گفته شده در صورت سؤال هیدرواستاتیک است. توجه کنید که شدت شیب کف کانال  $(\theta < 6^\circ)$  یا  $(\theta > 6^\circ)$  تأثیری در این موضوع ندارد.

**تذکر:** لازم به ذکر است در کانال‌های با کف محدب یا مقعر، توزیع فشار غیر هیدرواستاتیک می‌شود. چرا که در آنجا ذرات سیال دارای شتاب گریز از مرکز یا جانب مرکز نیز می‌باشند.

۹۹- (۴)

پخش شدن جریان در بستر نسبتاً مسطح خاکی، باعث می‌شود ضمن ثابت باقی ماندن مساحت مقطع جریان (طبق صورت سؤال)، پیرامون مرطوب مقطع ( $P$ ) افزایش یابد. به همین علت خواهیم داشت:

$$Q = \frac{1}{n} A R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}} \quad R = \frac{A}{P} \rightarrow Q = \frac{1}{n} \frac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}} S^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{S \text{ و } A \text{ ثابت}} Q \propto \frac{1}{n P^{\frac{2}{3}}}$$

فرض (۱): اگر بدانیم  $n_{\text{بتن}} > n_{\text{سرخس}} > n_{\text{خاکی}}$  است، چون  $P_{\text{بتن}} > P_{\text{خاکی}}$  می‌باشد، بنابراین  $Q_{\text{بتن}} > Q_{\text{خاکی}}$  به دست می‌آید. در این صورت گزینه (۱) صحیح خواهد بود.

فرض (۲): ممکن است طراح عزیز! در نظر داشته باشد که چون اطلاعاتی در مورد  $n$  مصالح نداریم، گزینه (۴) پاسخ صحیح این تست می‌باشد.

۱۰۰- (۳)

ابتدا با استفاده از رابطه عمق‌های متناوب در قبل و بعد از دریاچه، دبی در ادامه عرض جریان را می‌یابیم:

$$\frac{q^2}{yg} = \frac{y_1^2 y_2^2}{y_1 + y_2} = \frac{4^2 \times 1^2}{4 + 1} \Rightarrow \frac{q^2}{20} = \frac{16}{5} \Rightarrow q^2 = 64 \Rightarrow q = 8 \frac{m^3/s}{m}$$

بنابراین سرعت جریان در مقطع پس از دریاچه (مقطع (۲)) برابر می‌شود با:

$$V_2 = \frac{q}{y_2} = \frac{8}{1} = 8 \frac{m}{s} \Rightarrow Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{8}{\sqrt{10 \times 1}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

در نهایت با نوشتن رابطه اعماق مزدوج (بین  $y_2$  عمق اولیه پرش و  $y_1$  عمق ثانویه پرش)  $y_1$  را می‌یابیم:

$$\frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} (\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1) \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{1}{y} (\sqrt{1 + 8 \times (\frac{1}{\sqrt{10}})^2} - 1) = \frac{1}{y} (\sqrt{1 + 8 \times \frac{64}{10}} - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{y} (\sqrt{52/2} - 1) \approx 3/1m$$

البته طراح این سوال اعداد نامناسبی را برای محاسبه پایانی انتخاب کرده بود. ولی با کمی تقریب نیز می‌توانستیم بگوییم:

$$y = \frac{1}{y} (\sqrt{52/2} - 1) > \frac{1}{y} (\sqrt{49} - 1) = \frac{y-1}{y} = 3 \Rightarrow y = 3/1m \text{ کمی بیشتر از } 3m \text{ است}$$

(۴)-۱۰۱

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \\ dx = 22dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{22} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{22} = \frac{0.001 - 0.021}{1 - Fr^2} \Rightarrow 1 - Fr^2 = 22 \times (-0.02) = -0.44 \Rightarrow Fr^2 = 1/44 \Rightarrow Fr = 1/2$$

از طرفی چون  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{22} > 0$  است، جریان صعودی بوده و طبق گزینه‌ها، پروفیل‌های سطحی  $M_3$  و یا  $S_3$  می‌باشد.

کتاب هیدرولیک - تست (۴) صفحه (۲۶۱) و تست (۲۱) صفحه (۲۶۵)

جریانی در یک کانال مثلثی با شیب کف  $S_0 = 0.04$  و افت انرژی کل  $5/6$  متر در هر  $100$  متر از طول کانال برقرار است. اگر در مقطعی از جریان، عمق برابر  $5$  متر و سرعت متوسط مقطع  $3 \text{ m/s}$  باشد، گرادین تغییر عمق در جهت جریان در این مقطع کدام است؟

- (۱)  $2/5 \times 10^{-2}$  (۲)  $-2/5 \times 10^{-2}$  (۳)  $4 \times 10^{-3}$  (۴)  $-4 \times 10^{-3}$

گزینه (۲)

باید  $\frac{dy}{dx}$  را بیابیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V}{\sqrt{g \times \frac{y}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{10 \times \frac{5}{2}}} = 0.6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.04 - 0.056}{1 - 0.6^2} = -2/5 \times 10^{-2}$$

با توجه به معادله پروفیل جریان متغیر تدریجی  $\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$  به‌طوری که  $S_0$  و  $S_f$  به ترتیب شیب بستر و شیب خط انرژی و  $Fr$  عدد فرود

است، اگر عمق جریان ( $y$ ) حد واسط عمق بحرانی و عمق نرمال جریان ( $y_n$ ) باشد: ( $y_n > y > y_c$ )

(۲) پروفیل جریان از نوع  $M_2$  ،  $\frac{dy}{dx} > 0$

(۱) پروفیل جریان از نوع  $M_2$  ،  $\frac{dy}{dx} < 0$

(۴) پروفیل جریان از نوع  $M_3$  ،  $\frac{dy}{dx} > 0$

(۳) پروفیل جریان از نوع  $M_3$  ،  $\frac{dy}{dx} < 0$

گزینه (۱)

با توجه به این که  $y_n > y > y_c$  است، پروفیل جریان از نوع  $M_2$  بوده که یک پروفیل نزولی است. بنابراین  $\frac{dy}{dx} < 0$  می‌باشد.

(۱)-۱۰۲

$$\tau_0 = \gamma RS = \gamma y S \Rightarrow 1 = 10^4 \times 1 \times S \Rightarrow S = 10^{-4}$$

$$q = \frac{1}{n} y^{\frac{5}{3}} S^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.01} \times 1^{\frac{5}{3}} \times (10^{-4})^{\frac{1}{2}} = 1 \frac{m^3/s}{m}$$

## کتاب هیدرولیک - تست (۱۲) صفحه (۱۹۵)

آب با دبی در واحد عرض  $4 \frac{m^3}{s}$  در کانال مستطیلی عریضی با عمق ۱ متر جریان دارد. اگر ضریب مانینگ مجرا  $n = 0.01$  باشد، تنش برشی متوسط روی محیط خیس شده این کانال چند  $Pa$  است؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۶ (۳) ۴۰۰ (۴) ۴۰

گزینه (۲)

(کانال مستطیلی عریض)  $R \approx y = 1\text{ m}$  ،  $\tau = \gamma RS$

از طرفی با توجه به رابطه مانینگ برای کانال مستطیلی عریض، شیب کف کانال ( $S$ ) به دست می آید:

$$q = \frac{1}{n} y^{\frac{5}{3}} S^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 4 = \frac{1}{0.01} \times 1^{\frac{5}{3}} \times S^{\frac{1}{2}} \Rightarrow S = 0.0016$$

$$\tau = \gamma RS = 10^4 \times 1 \times 0.0016 = 16\text{ Pa}$$

بنابراین تنش برشی متوسط روی محیط خیس کانال برابر است با:

(۳)-۱۰۳

اگر ناظری را روی موج در نظر بگیریم که با سرعت موج ( $V_s$ ) در حال حرکت به بالادست باشد، در این صورت سرعت جریان در مقاطع (۱) و (۲) نسبت به این ناظر برابر می شود با:

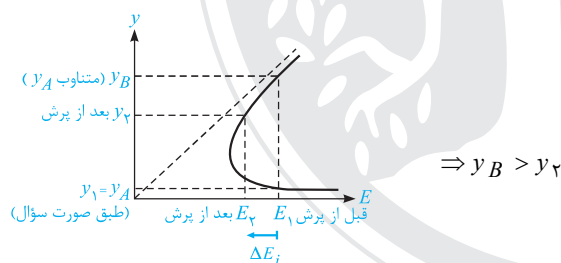
$$\bar{V}_1 = V_1 + V_s, \bar{V}_2 = V_2 + V_s$$

در نتیجه رابطه پیوستگی بین مقاطع (۱) و (۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{V}_1 y_1 = \bar{V}_2 y_2 \Rightarrow (V_1 + V_s) y_1 = (V_2 + V_s) y_2$$

(۱)-۱۰۴

عمق های گفته شده را روی منحنی  $E - y$  نمایش می دهیم:



## کتاب هیدرولیک - تمرین (۳-۱۱) صفحه (۱۴۸)

اگر  $y_1$  و  $y_2$  عمق های قبل و بعد از پرش هیدرولیکی و  $y'_1$  و  $y'_2$  عمق های متناوب نظیر هر یک باشند، کدام مقایسه پیرامون این ۴ عمق صحیح است؟

- (۱)  $y'_2 > y'_1$  (۲)  $y_2 > y'_1$  (۳)  $y'_2 > y_1$  (۴) هیچ کدام

هاله هر ۴ عمق را روی منحنی  $E - y$  مشخص می کنیم. در مشخص کردن این نقاط به نکات زیر توجه کنید:

۱- انرژی مخصوص قبل از پرش است و با توجه به این که قبل از پرش جریان فوق بحرانی است،  $y_1$  را روی شاخه فوق بحرانی مشخص می کنیم. (نقطه A)

۲-  $y'_1$  عمق متناوب  $y_1$  و عمق دیگر نظیر  $E_1$  است. (نقطه B)

۳- انرژی مخصوص بعد از پرش هیدرولیکی را برابر  $E_2$  در نظر بگیرید. می دانیم  $E_2 = E_1 - \Delta E_f$  می باشد.

بنابراین عمق بعد از پرش  $y_2$  نظیر انرژی  $E_2$  روی شاخه تحت بحرانی، نقطه C را خواهد داد.

۴-  $y'_2$  عمق متناوب  $y_2$  است که عمق دیگر نظیر انرژی مخصوص  $E_2$  می باشد (نقطه D).

واضح است که:

$$y'_2 > y_2 > y'_1 > y_1$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

باید کنترل کنیم انسداد رخ می‌دهد یا خیر.

$$E_1 = E_2, E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{90}{30 \times 2/5} = \frac{3}{2/5} = 1/2 \frac{m}{s} \Rightarrow E_1 = 2/5 + \frac{1/2^2}{2 \times 9.8} = 2/5 + 0.0125 = 2/5.025 \approx 2/5.025 \text{ m}$$

$$q_2 = \frac{Q}{b_2}, b_2 = b_1 - 2D = 30 - 2 \times 10 = 10 \text{ (m)} \Rightarrow q_2 = \frac{90}{10} = 9 \frac{m^3}{s \cdot m}$$

$$y_{c_2} = \left( \frac{q_2^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{9^2}{9.8} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8.1/9.8} \approx 2 \text{ m} \Rightarrow E = \frac{3}{2} y_{c_2} = \frac{3}{2} \times 2 = 3 \text{ m}$$

چون  $E_2 < E_{min_2}$  شده است، انسداد رخ می‌دهد و عمق جریان در محل تنگنا (پایه‌های پل) همان  $y_2 = y_{c_2} = 2 \text{ m}$  است که با توجه به گزینه‌ها،  $2/0.2 \text{ m}$  را انتخاب می‌کنیم.

کتاب هیدرولیک - تست (۵۶) مفهومی (۱۰۹) که سؤال کنکور سراسری ۸۲ است.

در رودخانه‌ای به عرض ۲۰ متر با مقطع مستطیلی، دبی  $40\sqrt{5} \text{ m}^3/\text{s}$  با عمق یکنواخت  $2/5$  متر جریان دارد. در محل احداث پل در اثر خاگری، عرض رودخانه به ۱۰ متر کاهش داده شده است. اگر افت انرژی موضعی صرف نظر شود، عمق جریان در محل تنگ شده کدام است؟

- ۱) ۱ m      ۲) ۲ m      ۳) ۳ m      ۴) ۴ m

گزینه (۲)

ابتدا با مقایسه  $E_1$  با  $E_{min_2}$ ، بررسی می‌کنیم که در عبور از مقطع تنگ شده، آیا انسداد رخ می‌دهد یا نه.

$$\begin{cases} E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} \\ q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{40\sqrt{5}}{20} = 2\sqrt{5}, y_1 = 2/5 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow E_1 = 2/5 + \frac{(2\sqrt{5})^2}{2 \times 10 \times (2/5)^2} = 2/5 + 1.6 = 2/6.6 \text{ m}$$

$$\begin{cases} E_{min_2} = \frac{3}{2} y_{c_2} \\ y_{c_2} = \left( \frac{q_2^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}, q_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{40\sqrt{5}}{10} = 4\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow E_{min_2} = \frac{3}{2} \left( \frac{(4\sqrt{5})^2}{9.8} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times 2 = 3 \text{ m}$$

از آنجا که  $E_1 < E_{min_2}$  می‌باشد، بنابراین انسداد رخ داده و وضعیت جریان در محل تنگ شده بحرانی خواهد بود و داریم:

$$y_2 = y_{c_2} = 2 \text{ m}$$



سری عمران

## سازه‌های فولادی و بتنی

### کارشناسی ارشد

#### و اما فولاد و بتن ...

امسال در کنکور اتفاق جالبی را شاهد بودیم. سؤالات درس فولاد، سؤالات معمول و مناسب بوده ولی تست‌های درس بتن بسیار غیر استاندارد (ولی دارای مفاهیم زیبا) بود. شاید اغراق نباشد که بگوییم امسال از ۸ سوال درس بتن، حل ۵ سوال عملاً در سر جلسه غیر ممکن بوده است. مشابه با سالهای گذشته که میانگین درصد درس فولاد و بتن ۲۰۰ نفر اول کنکور حدود ۲۳ درصد بوده است، امسال نیز زدن ۵ تست از ۱۶ تست، عملکرد بسیار مثبتی محسوب می‌شود که این امر با توجه به سؤالات استاندارد درس فولاد، کار چندان سختی نبوده است.

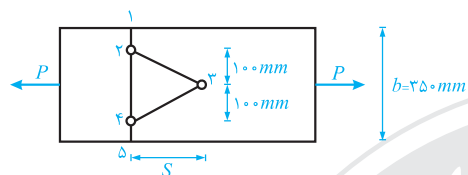
#### گروه پاسخ دهنندگان:

محمد آهنگر، نادر فنائی، محسن حیدری، ندا بزرگی، حسین صباغیان

سازه‌های فولادی و بتنی

(۴)-۱۰۶

در شکل زیر مسیر ۵-۴-۲-۱ دارای دو سوراخ و مسیر ۵-۴-۳-۲-۱ دارای سه سوراخ است. برای این که در محاسبه مسیر خالص تنها دو سوراخ دخالت داشته باشد، بایستی داشته باشیم:



$$A_{1-2-4-5} < A_{1-2-3-4-5} \Rightarrow (b - 2D)t < (b - 3D + 2 \times \frac{s^2}{4g})t$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{s^2}{4g} > D \Rightarrow s^2 > 2gD = 2 \times 100 \times 20 = 4000$$

$$\Rightarrow s > \sqrt{4000} = 63.24 \text{ mm} \approx 60 \text{ mm}$$

این سؤال مشابه با تست (۳) در صفحه ۵۷ کتاب فولاد سری عمران است.

(۱)-۱۰۷

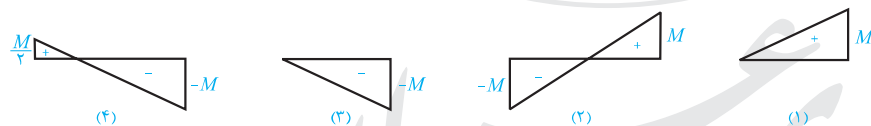
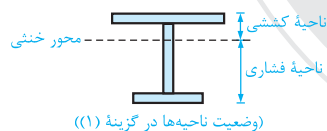
به علت وجود مهاربندی در طبقه دوم، ستون C مهار جانبی شده محسوب می‌شود و در نتیجه ضریب طول مؤثر کماتش آن کوچکتر از یک است (بین ۰/۵ و ۱/۰). به علت عدم وجود مهاربندی در طبقه اول، ستون‌های a و b مهار جانبی نشده محسوب می‌شوند و ضریب طول مؤثر کماتش آن‌ها بزرگتر از یک است. اتصال ستون‌های a و b در بالای آن‌ها به تیر به صورت صلب است اما در مقایسه شرایط تکیه‌گاهی ستون‌ها، پای ستون a مفصلی و پای ستون b گیردار است که مانع دوران پایین ستون b می‌شود و ستون b قویتر از a می‌شود و در نتیجه ضریب طول مؤثر کماتش ستون b کوچکتر از ستون a می‌باشد. با جمع‌بندی مطالب فوق نتیجه می‌شود که:

$$k_a > k_b > 1 > k_c \Rightarrow k_a > k_b > k_c$$

این تست مشابه تست‌های (۸) و (۱۰) در صفحه ۱۳۳ از کتاب سازه‌های فولادی سری عمران است.

(۳)-۱۰۸

می‌دانیم که در کماتش جانبی، بال فشاری و قسمتی از جان فشاری مشارکت می‌کنند. مقطع داده شده در صورت تست یک مقطع I شکل نامتقارن است که بال تحتانی آن ضعیف‌تر از بال فوقانی آن است و در نتیجه در شرایطی که بال پایینی تحت فشار قرار می‌گیرد، تیر از نظر پدیده کماتش جانبی کمترین ظرفیت را دارد. در هر چهار بارگذاری، لنگر خمشی ماکزیمم برابر M است ولی گزینه‌های دوم و چهارم اساساً نمی‌توانند به عنوان گزینه صحیح انتخاب شوند چون در این گزینه‌ها علامت لنگر خمشی تغییر می‌کند و تیر انحنای مضاعف را تجربه می‌کند، این یعنی در حالی که یک لنگر بالی را تحت فشار قرار داده است، لنگر دیگر آن بال را به کشش می‌اندازد. در مقایسه بارگذاری گزینه‌های اول و سوم چون بارگذاری گزینه سوم، بال پایینی را به فشار می‌اندازد شرایط تیر بحرانی‌تر است و تیر ظرفیت خمشی کمتری دارد. نمودار لنگر خمشی برای هر چهار گزینه در زیر ارائه شده است:



این تست برگرفته از مفهوم تمرین (۴-۶) در صفحه ۱۷۷ و تست ۷۰ در صفحه ۱۱۶ کتاب است.

(۳)-۱۰۹

با توجه به این که سختی جانبی تیر - ستون داده شده است، می‌توان تغییر مکان بالای تیر ستون را به راحتی محاسبه کرد و سپس لنگر پای ستون ناشی از برش آن را با لنگر ناشی از خروج از مرکزیت نیروی محوری‌اش جمع کنیم:

$$\Delta H = \frac{V}{k} = \frac{30 \text{ ton}}{20 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}} = 1.5 \text{ cm} = 0.015 \text{ m}$$

$$M_{bot} = V \times L + P \times \Delta = 30 \times 3 + 400 \times 0.015 = 90 + 6 = 96 \text{ t.m}$$

۱۱۰- (۲)

تیرهای گزینه‌های اول و سوم معین هستند در حالیکه تیر سرتاسری مطرح شده در گزینه دوم یک تیر نامعین است. اگر در تیر دوم از تقارن سازه و بارگذاری استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که می‌توان نصف تیر را در نظر گرفت و با توجه به صفر بودن چرخش در محل تکیه‌گاه میانی، یک تکیه‌گاه گیردار در وسط تیر قرار داد. در ادامه با محاسبه لنگر خمشی ماکزیمم تیرها داریم:

$$M_{max_1} = \frac{qL^2}{2}, M_{max_2} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(4q) \times L^2}{8} = \frac{qL^2}{2}, M_{max_3} = \frac{pL}{4} + \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^2}{2}$$

$$\Rightarrow M_{max_1} = M_{max_2} = M_{max_3} = \frac{qL^2}{2}$$

با توجه به این که مقطع تیرها فشرده است در تیر گزینه دوم که نامعین است، می‌توانیم از شرایط بازتوزیع لنگر استفاده کرد و به جای لنگر ماکزیمم که در محل تکیه‌گاه میانی اتفاق می‌افتد، ۹۰ درصد لنگر ماکزیمم در محل تکیه‌گاه میانی را ملاک طراحی قرار داد. بنابراین با توجه به امکان استفاده از باز توزیع لنگر، تیر گزینه‌ی دوم می‌تواند از مقطع کوچک‌تری طراحی شود.

**این تست عیناً تمرین (۴-۱۸) در صفحه ۱۹۱ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران است.**

۱۱۱- (۲)

پیچ سمت راست بحرانی است و با انتقال نیروی  $P$  به مرکز سطح مجموعه پیچ‌ها، دیده می‌شود که اتصال پیچی تحت اثر نیروی برشی  $P$  و لنگر پیچشی  $T = 175P$  قرار دارد. در پیچ بحرانی سمت راست مجموعه، تنش برشی ناشی از نیروی برشی  $P$  و تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی  $T$  هم‌جهت بوده (هر دو قائم هستند) و با یکدیگر جمع می‌شوند و داریم:

$$f_v = \frac{V}{\sum A} = \frac{P}{\lambda A}, f_T = \frac{TR}{J} = \frac{TR}{\sum A_i R_i^2} = \frac{TR}{nAR^2} = \frac{T}{nAR}$$

$$\Rightarrow f_T = \frac{175P}{\lambda A \times 25} = \frac{7P}{\lambda A}, f_{cr} = f_v + f_T = \frac{P}{\lambda A} + \frac{7P}{\lambda A} = \frac{8P}{\lambda A} \Rightarrow V_{cr} = f_{cr} \times A = \frac{8P}{\lambda} \times A = P$$

**این تست مشابه تمرین ۲۱، ۲۲ و ۲۳ از کتاب سازه‌های فولادی سری عمران است.**

۱۱۲- (۴)

در اتصال پیچی اتکایی برای اینکه باربری داشته باشیم، بایستی اتصال قدری بلغزد تا بدنه پیچ‌ها با ورق درگیر شوند و بارگذاری تحمل گردد. در این اتصال با توجه به سختی بسیار بزرگ جوش هیچ لغزشی اتفاق نمی‌افتد و در نتیجه اتصال پیچی اتکایی هیچ مشارکتی در تحمل نیروی کششی  $T$  نخواهد داشت. با در نظر گرفتن جوش‌های اتصال به تنهایی ظرفیت کششی  $T$  محاسبه می‌شود:

$$T = \text{ارزش جوش} \times \text{طول خط جوش} = (2 \times 20) \times (650 \times 0.5) = 13000 \text{ kg} = 13 \text{ ton}$$

۱۱۳- (۲)

**تذکر:** می‌دانیم که در یک اتصال جوشی اگر نیرو از مرکز سطح جوش بگذرد به علت ایجاد نشدن لنگر پیچشی در جوش، کم‌ترین تنش‌های ممکن در جوش به وجود می‌آیند و در این حالت که در همه نقاط جوش تنش برشی یکنواخت ایجاد شده است، اتصال بیش‌ترین باربری را دارد و مقدار مجاز نیرو ماکزیمم است. در این اتصال جوش برای وقوع این حالت که نیرو از وسط جوش می‌گذرد زاویه  $\alpha$  برابر است

$$\text{با } \frac{L}{L} \quad \alpha = \text{Arctan} \frac{L}{L} = \text{Arctan} \frac{1}{1}$$

که در گزینه سوم ارائه شده است.

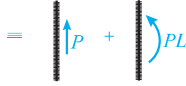
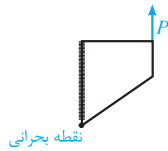
در صورت تست زاویه  $\alpha$  متناظر با کم‌ترین مقدار نیروی  $P$  را پرسیده است و بین گزینه‌های اول و دوم، بایستی گزینه صحیح انتخاب شود. در ادامه در هر دو حالت  $\alpha = 0^\circ$  و  $\alpha = 90^\circ$  تنش برشی ماکزیمم جوش را محاسبه می‌کنیم؛ در حالتی که تنش برشی ماکزیمم جوش، بزرگ‌تر است مقدار مجاز نیروی  $P$  کوچک‌تر است. در هر یک از این دو حالت، نیرو را به مرکز سطح جوش‌ها منتقل می‌کنیم و با جمع آثار برش و لنگر تنش برشی ماکزیمم جوش را محاسبه می‌کنیم با فرض این که بعد موثر برابر واحد باشد محاسبات را انجام می‌دهیم.

(۱) حالت  $\alpha = 0^\circ$

$$f_{max} = f_1 + f_2 = \frac{P}{L t_e} + \frac{\frac{PL}{L} \times \frac{L}{L}}{\frac{t_e L^2}{12}} = \frac{P}{L t_e} + \frac{3P}{L t_e} = \frac{4P}{L t_e}$$

(نقطه  $A$  بحرانی):

(۲) حالت  $\alpha = 90^\circ$



$$f_1 = \frac{P}{Lt_e}, f_2 = \frac{PL \times \frac{L}{2}}{t_e L^2} = \frac{eP}{Lt_e} \quad (\text{افقی})$$

$$f_{max} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{\left(\frac{P}{Lt_e}\right)^2 + \left(\frac{eP}{Lt_e}\right)^2} = \sqrt{3} \frac{P}{Lt_e} > \frac{eP}{Lt_e}$$

با توجه به این که در این حالت ( $\alpha = 90^\circ$ ) تنش برشی ماکزیمم جوش بزرگتر شده است نتیجه می‌شود که در این حالت نیروی مجاز  $P$  کوچکتر است.

(۱۱۴) - (۱)

در یک دال دو طرفه با تیر بین تکیه‌گاه‌ها، نحوه انتقال بارهای قائم که به دال وارد می‌شوند به نسبت  $\frac{\alpha_1 L_2}{L_1}$  بستگی دارد به طوری که

حالت ۱: اگر  $\frac{\alpha_1 L_2}{L_1} \geq 1/10$  باشد، کل بار توسط عملکرد برشی تیرها به ستون منتقل می‌شود.

حالت ۲: اگر  $\frac{\alpha_1 L_2}{L_1} < 1/10$  باشد، قسمتی از بار توسط عملکرد برشی تیرها و قسمت دیگر توسط عملکرد برشی دال به ستون منتقل می‌شود و داریم:

$$\frac{\alpha_1 L_2}{L_1} < 1/10 \Rightarrow \begin{cases} \text{سهام انتقال برشی به صورت یک طرفه از طریق تیرها} \\ \text{کل بار } \frac{\alpha_1 L_2}{L_1} \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{سهام انتقال برشی به صورت دو طرفه از طریق دال} \\ \text{کل بار } (1 - \frac{\alpha_1 L_2}{L_1}) \times \end{cases}$$

بنابراین در این سوال با توجه به این که  $\frac{\alpha_1 L_2}{L_1} = 0/4$  داده شده است، می‌توان گفت که:

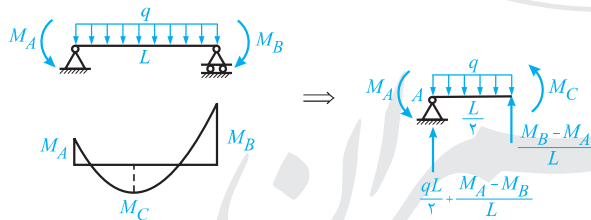
سهام انتقالی برش به ستون به صورت یک طرفه از طریق تیرها  $0/4 \times 200 = 80 \text{ kN}$

سهام انتقالی برش به ستون به صورت دو طرفه از طریق دال  $(1 - 0/4) \times 200 = 120 \text{ kN}$

بنابراین گزینه (۱) پاسخ تست می‌باشد.

(۱۱۵) - (۲)

روش اول: در باز توزیع لنگر، لنگر منفی در تیرها به یک مقدار مشخص کاسته می‌شود و متناسب با آن لنگر مثبت در وسط تیر با حفظ اصول تعادل استاتیکی اضافه می‌شود و نکته مهم آن است که تعادل باید همواره برقرار باشد:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_C + M_A + \frac{M_B - M_A}{L} \times \frac{L}{2} - \frac{qL}{2} \times \frac{L}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(M_A + M_B) + M_C = \frac{qL^2}{8} \quad (\text{این رابطه باید همواره برقرار باشد.})$$

$$\begin{cases} \text{حالت اول: } M_A = 80 \text{ kN.m}, M_C = 90 \text{ kN.m}, M_B = 160 \text{ kN.m} \\ \text{حالت دوم: } M'_A = 80 \text{ kN.m}, M'_C = 100 \text{ kN.m}, M'_B = ? \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}(80 + 160) + 90 = \frac{1}{4}(80 + M'_B) + 100 \Rightarrow M'_B = 140 \text{ kN.m} \Rightarrow \text{لنگر B را } 20 \text{ kN.m} \text{ می‌توان کاهش داد.}$$

**روش دوم:** اگر لنگر منفی یک تکیه‌گاه به اندازه  $A$  و لنگر منفی تکیه‌گاه دیگر به اندازه  $B$  کاهش یابد، لنگر مثبت وسط دهانه به اندازه  $\frac{A+B}{2}$  افزایش می‌یابد.

بنابراین با توجه به این که در این سوال می‌خواهیم لنگر وسط دهانه به اندازه  $10 \text{ kN}$  افزایش یابد داریم:

$$\frac{A+B}{2} = 10 \text{ kN} \Rightarrow 100 - 90 = 10 \text{ kN}$$

از طرفی لنگر تکیه‌گاه سمت چپ را تغییر نمی‌دهیم و این یعنی  $A = 0$  است، پس داریم:

$$\frac{A+B}{2} = 10 \text{ kN} \xrightarrow{A=0} B = 20 \text{ kN.m}$$

(۴)-۱۱۶

برای تعیین تغییر شکل درازمدت تیرهای بتنی از ضریب  $\lambda = \frac{\xi}{1+\gamma.p}$  استفاده می‌شود (  $\xi$  برای درازمدت و بعد از ۵ سال برابر ۲ فرض می‌شود)، و در صورت متفاوت بودن در تکیه‌گاه و وسط از میانگین  $\lambda$  ها استفاده می‌کنیم:

افتادگی درازمدت + افتادگی آبی = افتادگی کل

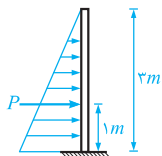
افتادگی آبی تحت بار دائمی  $\times \lambda +$  (افتادگی آبی تحت بار زنده + افتادگی آبی تحت بار دائمی) = افتادگی کل

$$= (2/5 + 3) + \left(\frac{1/6 + 2}{2}\right) \times 2/5 = 5/5 + 4/5 = 10 \text{ cm}$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

(۲)-۱۱۷

برای تعیین فولاد طولی مورد نیاز برای واحد عرض این دیوار، ابتدا باید لنگر وارد بر مقطع دیوار در عرض واحد تعیین شده و سپس با مساوی قرار دادن آن با لنگر مقاوم دیوار، آرماتور مورد نیاز محاسبه شود.



$$P = \frac{5h \times 3}{2} = \frac{36 \times 3}{2} = 54 \text{ kN/m}$$

$$M = 54 \times 1 \times 1 = 54 \text{ kN.m} \Rightarrow \text{بازو} \times (\text{عرض دیوار} \times \text{نیروی } P \text{ در واحد طول دیوار}) = \text{لنگر وارد بر پای دیوار}$$

لنگر وارد بر دیوار  $54 \text{ kN.m}$  می‌باشد. برای تعیین مقدار آرماتور مورد نیاز باید این مقدار را با لنگر مقاوم دیوار برابر قرار دهیم:

$$M = \phi_s f_y A_s \times (\text{بازوی مقاوم}) \Rightarrow \text{لنگر مقاوم}$$

$$300 - 50 = 250 \text{ mm} = \text{مقدار پوشش آرماتور} - \text{ضخامت دیوار} = \text{عمق مؤثر دیوار}$$

$$z = 0/9 \times 250 = 225 \text{ mm} = \text{عمق مؤثر دیوار} \times 0/9 \text{ : بازوی لنگر}$$

$$54 \times 10^6 \text{ N.mm} = 1 \times 400 \times A_s \times 225 \Rightarrow A_s = 600 \text{ mm}^2 = \phi_s f_y A_s \times z \Rightarrow \text{لنگر مقاوم}$$

(۱)-۱۱۸

برای حل این سوال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

**گام اول:** در اثر کرنش انقباضی، در بتن تنش کششی زیر ایجاد می‌شود:

$$f_{t1} = E_c \epsilon_{sh} = 17/5 \times (1/5 \times 10^{-4}) \times 10^3 = 2/625 \text{ MPa}$$

**گام دوم:** بتن تا  $3/5 \text{ MPa}$  می‌تواند تنش کششی تحمل کند و در نتیجه دما باید تنش کششی  $2/625 \text{ MPa}$  برساند و داریم:

$$f_{t2} = 3/5 - 2/625 = 0/875 \text{ MPa} = \text{در اثر دما}$$

$$\epsilon = \frac{f_{t2}}{E_c} = \frac{0/875}{17/5} \times 10^{-3} = \frac{5}{100} \times 10^{-3}$$

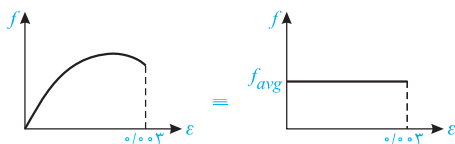
$$\epsilon = \alpha \Delta T \Rightarrow \frac{5}{100} \times 10^{-3} = 10^{-5} \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = 5^\circ \text{C}$$

نگاه دیگر: با کمک روند زیر می‌توان به جواب رسید:

$$(f_t)_{\text{جمع شدگی}} + (f_t)_{\text{تغییر دما}} = f_r \Rightarrow E_c \epsilon_{sh} + E_c \alpha \Delta T = f_r$$

**این تمرین، ترکیب سؤال (۱۴) در صفحه ۲۴ و تست (۱۲) در صفحه ۱۴۲ از جلد اول بتن سری عمران بوده است.**

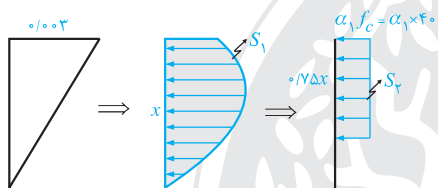
با کمک مساحت زیر نمودار تنش - کرنش، مقدار متوسط تنش بتن را به دست می آوریم:



$$S = \int_0^{0.003} (-4/5 \times 10^6)x^2 + (2/5 \times 10^6)x \, dx = -4/5 \times 10^6 \times \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0.003} + 2/5 \times 10^6 \times \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0.003} = 72 \times 10^{-3}$$

$$f_{avg} = \frac{S}{0.003} = \frac{72 \times 10^{-3}}{0.003} = 24 \text{ MPa}$$

با این ابتکار، در تمام کرنش‌ها می‌توان تنش را ۲۴ MPa فرض کرد و در ادامه با توجه به برابری مساحت بلوک ویتنی با مساحت بلوک اصلی (که می‌توان مساحتش را از حاصل ضرب  $f_{avg}$  در  $x$  به دست آورد) داریم:



$$S_1 = S_2 \Rightarrow \text{تنش متوسط } \alpha_1 f_c = \alpha_1 \times 40 \Rightarrow 24 \times x = \alpha_1 \times 40 \times \frac{3}{4} \times x \Rightarrow \alpha_1 = 0.8$$

در این سوال ظرفیت یک ستون تحت خمش دو محوره ( $e_y$ ,  $e_x$ ) مطرح می‌باشد، پس باید از رابطه روش برسلر استفاده کنیم:

۱- تحت بار محوری خالص ( $P_o$ )

۲- تحت خروج از مرکزیت  $e_y$  به تنهایی ( $P_y$ )

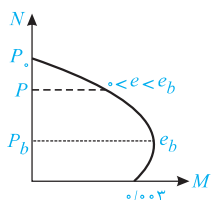
۳- تحت خروج از مرکزیت  $e_x$  به تنهایی ( $P_x$ )

حال با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سوال و نمودار اندرکنش ستون می‌توان گفت که:

۱- طبق صورت سوال  $P_o = 4P_b$  می‌باشد.

۲- تحت خروج از مرکزیت  $e_x = e_b$ ، ستون در حالت بالانس قرار دارد و لذا  $P_y = P_b$  می‌باشد.

۳- تحت خروج از مرکزیت  $e_y = \frac{e_b}{4}$ ، ستون در محدوده شکست فشاری قرار دارد، پس داریم:



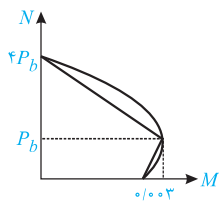
$$e_y = \frac{e_b}{4} \Rightarrow 0 < e_y < e_b \longrightarrow P_b < P_y < P_o = 4P_b$$

بنابراین کمترین مقدار برای  $P_y$  برابر  $P_b$  و بیش‌ترین آن  $4P_b$  می‌باشد. پس می‌توان با استفاده از کران پایین و بالای  $P_y$ ، کران‌های  $P_r$  را از روش برسلر بدست آورد:

$$P_y = P_b : \frac{1}{P_r} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o} = \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_b} - \frac{1}{4P_b} = \frac{7}{4P_b} \Rightarrow P_r = \frac{4}{7}P_b$$

$$P_y = 4P_b : \frac{1}{P_r} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o} = \frac{1}{4P_b} + \frac{1}{4P_b} - \frac{1}{4P_b} = \frac{1}{4P_b} \Rightarrow P_r = P_b$$

بنابراین نیروی محوری قابل تحمل ستون در بازه  $\frac{4}{7}P_b < P_r < P_b$  تغییر می‌کند و گزینه (۳) صحیح می‌باشد.



**تذکر:** با فرض خطی بودن اندرکنش می‌توان مقدار  $P_y$  را به طور دقیق نیز به صورت زیر محاسبه کرد:

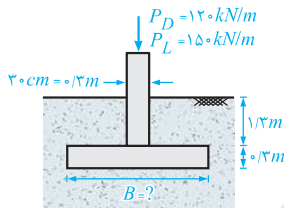
$$N = \frac{0 - 4P_b}{M_b - 0} \times M + P_b \Rightarrow N = \frac{-4P_b}{P_b \times e_b} \times (N \times \frac{e_b}{2}) + 4P_b \Rightarrow N = \frac{4}{3}P_b$$

$$\frac{1}{P_r} = \frac{1}{P_b} + \frac{4}{3} \frac{1}{P_b} - \frac{1}{4P_b} \Rightarrow P_r = \frac{2}{3}P_b$$

این سؤال مشابه تمرین‌های ۳۱ و ۳۲ از جلد اول کتاب بتن سری عمران بوده است.

(۴) - ۱۲۱

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سوال، می‌توان شکل این مسئله را به صورت مقابل رسم کرد:



برای تعیین عرض مورد نیاز پی، باید کل نیروی وارد بر خاک محاسبه شده و از تقسیم آن بر مساحت کف پی، تنش موجود در خاک زیر پی بدست آید. سپس با مقایسه این تنش با تنش مجاز خاک می‌توان عرض  $B$  را بدست آورد. توجه کنید که در این حالت بارها باید بدون ضریب استفاده شوند:

نیروی زنده + (وزن بتن پی + وزن خاک روی شالوده - بار مرده دیوار) = نیروی زنده + مجموع نیروهای مرده = کل نیروی بدون ضریب

$$\text{کل نیروی بدون ضریب} = 120 + 1/3 \times 17/5 + (0/2B) \times 25 + 150 = 292/5 + 7/5B$$

$$\frac{\text{کل نیروی بدون ضریب}}{\text{سطح زیر پی}} = \text{تنش مجاز} \Rightarrow \frac{(292/5 + 7/5B)}{B \times 1} = 2/5 \Rightarrow B = 1/48m$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، عرض پی برابر ۱/۵ متر در نظر گرفته می‌شود.

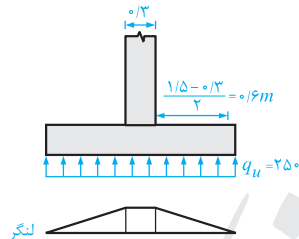
بعد از تعیین عرض پی، حال می‌خواهیم لنگر طراحی را در وسط عرض شالوده محاسبه کنیم. برای این کار باید دو موضوع را به یاد داشته باشیم:

۱- در محاسبات سازه‌ای پی، بارها باید با استفاده از ضرایب بار افزایش داده شوند.

۲- وزن خاک روی شالوده و وزن بتن پی در محاسبات خمشی بی‌اثر است. به عبارت دیگر تنها بار مرده و زنده دیوار ایجاد خمشی می‌کند زیرا این بارها به صورت متمرکز در وسط پی اعمال می‌شود:

$$\text{نیروی ضریب‌دار برای محاسبات خمشی} = 1/25 P_D + 1/5 P_L = 1/25 \times 120 + 1/5 \times 150 = 375 kN/m$$

$$q_u = \frac{375 \times 1}{B \times 1} = \frac{375}{1/5} = 250$$



$$\Rightarrow M = \frac{q_u L^2}{2} = \frac{250 \times 0/6^2}{2} = 45 kN.m$$

لنگر

توجه کنید که مقدار لنگر از هر دیوار تا وسط دیوار مقدار ثابتی دارد، زیرا به همان مقدار تنشی که در زیر پی وجود دارد، تنش در محل اتصال دیوار با پی ایجاد می‌شود، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین (۲) در صفحه ۱۹۹ و تمرین (۷) در صفحه ۲۰۸ از جلد دوم کتاب بتن سری عمران بوده است.



## سری عمران

### راهسازی

#### کارشناسی ارشد

همانطور که انتظار می‌رفت امسال هم مانند سال‌های قبل سؤالات درس راهسازی بسیار منطقی و استاندارد طراحی شده بود. اگر بخواهیم نگاهی کلی و دقیق به سؤالات راهسازی آزمون ۹۳ داشته باشیم، میتوان گفت: راهسازی شامل ۵ سوال آسان و ۲ سوال متوسط بود.

یعنی در درس راهسازی سوال سختی دیده نشد، به‌طوری که اگر دانشجویی حتی یک دور مطالب راهسازی را مطالعه می‌کرد به راحتی در سر جلسه کنکور می‌توانست حداقل به ۴ سوال و حداکثر به ۷ سوال (یعنی کل سؤالات راهسازی) پاسخ دهد.

اما در مورد درس روسازی باید اذعان داشت که امسال هم مانند سال‌های ۹۱ و ۹۲، سؤالات روسازی از منبع مشخصی طراحی نشده بود و بسیاری از سؤالات از قسمت‌هایی بود که انتظار طرح تست از آن نمی‌رفت. شایان ذکر است که درس روسازی در کنکور بسیار متفاوت از راهسازی است و در حال حاضر منبع مناسبی برای این درس پیشنهاد نمی‌شود اما سری عمران سعی بر این دارد که با کتاب نسل جدید خود در این درس مشکل داوطلبان را تا حدودی برطرف نماید تا عزیزان بتوانند در سر جلسه کنکور به حداقل ۴ الی ۵ سوال از درس روسازی پاسخ صحیح دهند.

پاسخ سؤالات روسازی کنکور امسال بر روی سایت سری عمران قرار نخواهد گرفت زیرا در مورد ۳ سوال آن براساس منابع مختلف دانشگاهی (کتاب دکتر طباطبایی، کتاب دکتر تن‌زاده و نشریه ۲۳۴) می‌توان گزینه‌های مختلفی را به عنوان پاسخ صحیح برگزید.

باید منتظر ماند تا کلید سازمان سنجش منتشر شود و در مورد این سؤالات بحث و بررسی کرد.

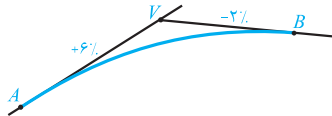
#### گروه پاسخ دندگان:

نیم‌ا ابراهیمی، مسعود مهدیان، مسعود دانایی، محمد شاکری

رابطه سازی و روم سازی راه

۱۲۲- (۲)

ابتدا شکل نیم رخ طولی را رسم می کنیم:



از دو روش می توان ارتفاع نقطه  $A$  را بدست آورد:

قبل از اینکه به بررسی دو راه حل بپردازیم ابتدا در مرحله اول طول قوس را که به سادگی می توان بدست آورد، محاسبه می کنیم.

در صورت سوال گفته شده است که:

« اگر این قوس قائم به ازای هر ۸۰ متر یک درصد تغییر شیب ایجاد کند »

این موضوع یعنی اینکه ،  $K = 80$  . بنابراین طول قوس قائم برابر است با:

$$\begin{cases} A = |g_2 - g_1| \\ L = K \cdot A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = |(-2) - (+6)| = 8\% \\ k = 80 \end{cases} \Rightarrow L = 8 \times 80 = 640m$$

راه حل اول:

حال با توجه به ارتفاع نقطه  $B$  می توانیم ارتفاع نقطه  $V$  را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} h_B = h_V + \left[ \left( \frac{L}{2} \right) \times g_2 \right] \\ h_B = 1000m, L = 640 \end{cases} \Rightarrow 1000 = h_V + \left[ \left( \frac{640}{2} \right) \times \left( \frac{-2}{100} \right) \right] \Rightarrow h_V = 1006/4m$$

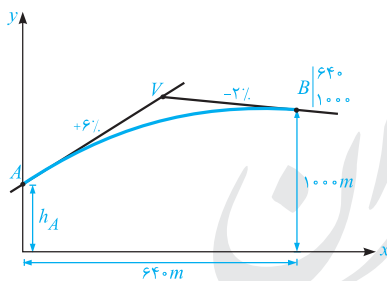
حال با توجه به ارتفاع نقطه  $V$  ، ارتفاع نقطه  $A$  را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} h_A = h_V - \left[ \left( \frac{L}{2} \right) \times g_1 \right] \\ h_V = 1006/4m, L = 640 \end{cases} \Rightarrow h_A = 1006/4 - \left[ \left( \frac{640}{2} \right) \times \left( \frac{+6}{100} \right) \right] \Rightarrow h_V = 987/2m$$

راه حل دوم: در این روش می توانیم با استفاده از معادله سهمی درجه دوم ارتفاع نقطه  $A$  را به دست آوریم:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + y_A \\ y = \frac{g_2 - g_1}{200L} x^2 + \frac{g_1}{100} x + y_A \end{cases}$$

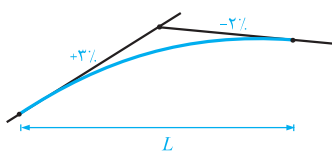
با قرار دادن طول، ارتفاع نقطه  $B$  در معادله سهمی می توان ارتفاع نقطه  $A$  را بدست آورد. به شکل زیر توجه کنید :



$$1000 = \frac{(-2) - (+6)}{200 \times 640} (640)^2 + \frac{6}{100} \times 640 + h_A \Rightarrow h_A = 987/2m$$

۱۲۳- (۴)

طول حداقل قوس قائم از رابطه  $L = K \cdot A$  بدست می آید. شکل مقابل نشان دهنده شیب در قوس قائم این تست می باشد.



$$\begin{cases} A = |g_2 - g_1| \\ L = K \cdot A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = |(-2) - (+3)| = 5\% \\ k = 150 \end{cases} \Rightarrow L = 5 \times 150 = 750m$$

این سؤال مشابه تست ۱ صفحه ۱۲۹ کتاب راه سازی سری عمران بوده است.

شعاع حداقل قوس دایره‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$R = \frac{V^2}{127/2(e+f)}$$

اگر شعاع جدید را برابر با  $R'$  در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$R' = \frac{(V')^2}{127/2(e+f)} \quad V' = 2V, e=0, f=cte \rightarrow R' = \frac{(2V)^2}{127/2(e+f)} = \frac{4V^2}{127/2(e+f)}$$

این سؤال مشابه مبثت تعیین شعاع حداقل در قوس‌های افقی صفحه ۱۴ کتاب راهسازی سری عمران بوده است.

با توجه به فرمول شعاع حداقل قوس دایره‌ای، مقدار دور برابر است با:

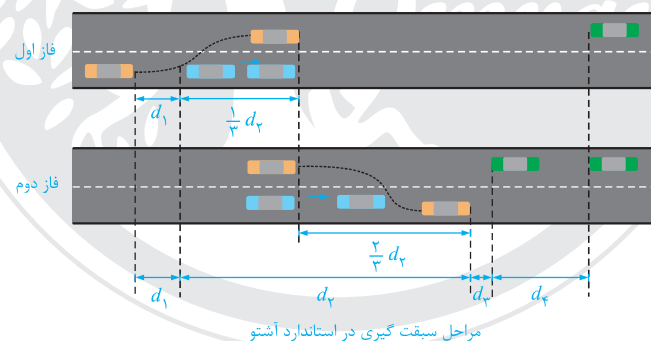
$$R = \frac{V^2}{127/2(e+f)} \rightarrow e = \frac{V^2}{127/2R} - f$$

همان طور که مشاهده می‌شود در رابطه  $e = \frac{V^2}{127/2R} - f$ ، با فرض ثابت بودن  $f$ ، با افزایش سرعت و با کاهش شعاع قوس افقی، مقدار برابندی (دور) افزایش می‌یابد.

$$\begin{cases} V \uparrow \\ R \downarrow \end{cases} \Rightarrow e \uparrow$$

این سؤال مشابه مبثت تعیین شعاع حداقل در قوس‌های افقی صفحه ۱۴ کتاب راهسازی سری عمران بوده است.

در استاندارد آشتو فاصله دید سبقت در مسیر مستقیم به چهار قسمت تقسیم می‌شود:



با توجه به شکل این چهار قسمت عبارتند از:

$d_1$ : فاصله مانور اولیه (فاصله‌ای که وسیله نارنجی می‌پیماید تا آماده سبقت گرفتن از وسیله آبی رنگ شود) این فاصله برابر است با:

$$d_1 = 0.278t(V - m + \frac{at}{2})$$

$t$ : زمان مانور اولیه (s)

$a$ : شتاب متوسط حرکت وسیله نقلیه سبقت گیرنده ( $m/s^2$ )

$V$ : سرعت وسیله نقلیه سبقت گیرنده ( $km/hr$ )

$m$ : اختلاف سرعت وسیله نقلیه سبقت گیرنده و سبقت گرفته شده ( $km/hr$ )

**کس دقت:** رابطه  $d_1$ ، همان رابطه معروف  $d = \frac{1}{2}at^2 + V_0t$  در فیزیک می‌باشد که در این رابطه  $V_0$  بر حسب  $m/s$  در محاسبات وارد می‌شود.

$d_2$ : فاصله‌ای که وسیله نقلیه نارنجی، از لحظه انحراف به چپ و در طول زمان جلو زدن از وسیله آبی می‌پیماید تا دوباره به خط خود بازگردد.

$$d_2 = 0.278Vt_2$$

$t_2$ : زمانی است که وسیله سبقت گیرنده خط سمت چپ را اشغال می‌کند. (s)

$V$ : سرعت متوسط حرکت وسیله سبقت گیرنده ( $km/hr$ )

$d_1$ : فاصله ایمنی، فاصله مطمئن بین وسیله نقلیه نارنجی رنگ و سبز رنگ پس از سبقت این فاصله برای سرعت‌های مختلف از ۳۰ تا ۹۰ متر توصیه می‌شود.

$d_4$ : فاصله‌ای که وسیله نقلیه سبز پس از مشاهده وسیله نقلیه نارنجی می‌پیماید. که برابر است با:

$$d_4 = \frac{2}{3} d_1$$

پس در حالت کلی فاصله دید سبقت (PSD) برابر است با:

$$PSD = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

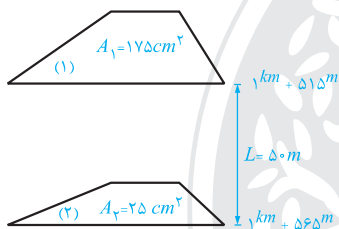
اگر به صورت سوال دقت شود مقادیر  $d_1$  و  $d_4$  مشخص شده‌اند که در این سوال  $d_4$  مجهول است:

$$\begin{cases} d_1 = 0.278Vt = 0.278 \times 90 \times 15 = 375 \text{ m} \\ d_4 = \frac{2}{3} d_1 = \frac{2}{3} \times 375 = 250 \text{ m} \end{cases}$$

این سؤال مشابه مبحث فاصله دید سبقت صفحه ۱۴۴ کتاب راهسازی سری عمران بوده است.

۱۲۷- (۳)

شکل صورت مساله را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه حجم خاکبرداری بین این دو مقطع بر حسب  $m^3$  خواسته شده است، لذا مساحت‌ها را باید به  $m^2$  تبدیل کنیم:

$$A_1 + A_2 = 25 + 175 = 200 \text{ cm}^2$$

به جدول زیر توجه کنید:

مقیاس	متراژ روی زمین واقعی	متراژ روی نقشه
$\frac{1}{100}$	$1 m^2$	$1 cm^2$
$\frac{1}{50}$	$1 m^2$	$4 cm^2$

حال با توجه به این نوع تناسب در مقیاس  $\frac{1}{50}$  داریم:

$$1 m^2 \Rightarrow 4 cm^2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 60 m^2$$

$$\boxed{x} m^2 \Rightarrow 200 cm^2$$

$\rightarrow (A_1 + A_2)$

مقدار حجم عملیات خاکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_C = \frac{A_1 + A_2}{2} \times L = \left(\frac{60}{2}\right) m^2 \times (50) m = 1500 m^3$$

یک اشتباه رایج دانشجویان:

ممکن است به اشتباه برخی از دانشجویان گزینه ۲ را انتخاب کرده باشند، به صورت زیر:

$$V_C = \left(\frac{175 + 25}{2}\right) cm^2 \times (50) m = 5000 m^3 \text{ (که این دو در هم ضرب نمی‌شوند)}$$

این روش کاملاً اشتباه می‌باشد.

این سؤال مشابه مبحث مناسبه حجم عملیات خاکی بین دو نیم رخ عرضی متوالی صفحه ۱۶۰ کتاب راهسازی سری عمران بوده است.

با توجه به اینکه شیب  $8^\circ$  درصد یک شیب غیرقابل اجرا (و غیرقابل قبول در آیین نامه) می باشد، به نظر می رسد که این شیب  $8$  درصد باشد و منظور طراح محترم شیب  $8$  درصد، ملاک اصلی سؤال است. به هر حال با توجه به شیب  $8$  درصد (حداکثر شیب مجاز طولی) این مسئله را حل می کنیم. ابتدا با توجه به مقیاس نشان داده شده شیب موجود را به دست می آوریم، همانطور که در مقیاس نشان داده شده مشخص است طول بین  $A$  و  $B$  بیش از  $400$  متر است بنابراین داریم:

$$\text{شیب موجود} = \frac{\text{اختلاف ارتفاع } A \text{ و } B}{\text{طول نقاط } A \text{ و } B} = \frac{580 - 500}{400} = \frac{80}{400} \times 100 = 20\%$$

به عنوان مثال

حال با توجه به دو طول دیگر، امتحان می کنیم:  
اگر فاصله  $A$  تا  $B$  را  $400$  متر در نظر بگیریم داریم:

$$L = \frac{80}{400} \times 100 = 20\%$$

اگر فاصله  $A$  تا  $B$  را  $500$  متر در نظر بگیریم داریم:

$$i = \frac{80}{500} \times 100 = 16\%$$

در هر صورتی مقدار شیب بزرگتر و یا مساوی دو برابر شیب حداکثر مجاز خواهد بود و از آنجایی که شیب موجود نمی تواند از شیب مجاز بیشتر باشد، لذا گزینه ۱ صحیح است.

این سؤال مشابه مبمٹ ویژگی‌های منمنی میزان صفم۱۴ کتاب راهسازی سری عمران بوده است.



سری عمران